

# UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE II

---

Groupement de Recherches en Economie Quantitative  
d'Aix-Marseille (GREQAM)

&

Centre de Recherche sur les Dynamiques et Politiques  
Économiques et l'Économie des Ressources (CEDERS)

---

Année 2004

N° attribué par la bibliothèque

|||||

## THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX MARSEILLE II

Discipline : Sciences Économiques

présentée et soutenue publiquement par

Mohamed Safouane BEN AÏSSA

Le 7 décembre 2004

---

## Dynamiques de l'Inflation Américaine Autour des Changements Structurels : Essais Théoriques & Empiriques

---

Directeurs de thèse :

Pr. Eric Girardin, Université d'Aix Marseille II  
& MdC. Costin Protopopescu, Université d'Aix Marseille II

---

### JURY

Pr. Bruno Amable, Université de Paris-X Nanterre	Rapporteur
MdC. Mohamed Boutahar, Université d'Aix-Marseille II	Membre
Pr. Alessandra Casella, Columbia University (USA)	Membre
Pr. Roselyne Joyeux, Macquarie University (Australie)	Membre
Pr. Hubert Kempf, Université de Paris-I Panthéon Sorbonne	Président
MdC. Jamel Trabelsi, Université de Strasbourg	Rapporteur

L'université d'Aix-Marseille II n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

# Sommaire

Remerciements

Introduction Générale

Partie I : Chocs Monétaires & Persistance de l'Inflation

Chapitre 1 : La Persistance de l'Inflation dans les Modèles Néo-Keynésiens

Chapitre 2 : Impact de la Périodicité des Contrats sur la Persistance de l'Inflation

Partie II : Densité Spectrale & Identification des Changements Structurels dans l'Inflation Américaine

Chapitre 3 : La Théorie de l'Analyse Spectrale

Chapitre 4 : Densité Spectrale Évolutive & Identification des Changements Structurels

Partie III : Essais Empiriques sur la Courbe Néo-Keynésienne de Phillips

Chapitre 5 : Régime Monétaire & Stabilité des Paramètres de la Courbe de Phillips Hybride

Chapitre 6 : Résolution des Modèles Multivariés à Anticipations Rationnelles & Estimation Structurelle d'un Modèle Néo-Keynésien Général

Conclusion Générale

Bibliographie Générale

Table des Matières

# Remerciements

À l'heure où ce travail de thèse se termine, je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma gratitude envers ceux qui ont contribué à son élaboration.

En tout premier lieu, je tiens à remercier vivement mes deux directeurs de thèse, Eric Girardin et Costin Protopopescu pour avoir accepté de diriger cette recherche, pour le temps qu'ils m'ont consacré et pour leur aide ô combien précieuse tout au long de ces années. Leur philosophie et leur gentillesse ont indéniablement renforcé mon goût pour la recherche et le travail en équipe. Qu'ils trouvent dans ces quelques lignes, dérisoires en comparaison de leur importance dans cette recherche, la marque indélébile de ma reconnaissance à leur égard.

Je suis très heureux que Mohamed Boutahar ait accepté de s'impliquer dans cette recherche. Sa disponibilité et sa compétence m'ont permis d'abord d'apprendre beaucoup ensuite d'améliorer très significativement cette thèse. Son implication de tous instants m'a été extrêmement bénéfique. La gratitude que je lui témoigne est à la mesure de son apport.

Je dois également témoigner toute ma gratitude à Alessandra Casella. Sa collaboration ne fut pas seulement fructueuse et stimulante, elle fut déterminante dans l'accomplissement de cette recherche. Je lui dois l'intuition et l'idée du cinquième chapitre de cette thèse.

Bruno Amable & Jamel Trabelsi ont bien voulu s'intéresser à mes travaux et accepter d'en être rapporteurs, je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie vivement Roselyne Joyeux pour avoir accepté d'être membre dans le jury.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à Hubert Kempf, directeur d'EUREQua, pour accepter de présider le jury de cette thèse.

Claude Deniau, Gilbert Abraham-Frois, Alain Venditti, David De Lacroix, Christian Deissenberg et Jean-Christophe Pereau ont également contribué à l'amélioration de ce travail en relisant certains travaux et en y apportant des remarques toujours pertinentes. Qu'ils en soient tous remerciés.

L'aide technique de Seonghoon Cho de Columbia University ainsi que celle de Michel Juillard m'a été très précieuse dans la programmation de mes codes *Matlab*. Je dois beaucoup à Costin Protopopescu d'abord pour la découverte du logiciel *Matlab* (Par conséquent, j'ai enterré le logiciel GAUSS) et ensuite pour le perfectionnement de ma programmation sur *Matlab*. Je les remercie tous.

Mes pensées vont à la mémoire de Louis-André Gérard-Varet. Il a influencé sensiblement mon destin en m'inscrivant au DEA "Econométrie Mathématique et Econométrie" au GREQAM alors que j'étais jeune diplômé de l'INSEA. Je me rappelle encore de la fin de notre entretien à Rabat quand il m'a formulé son souhait de me voir préparer une thèse doctorale au sein du GREQAM.

Je remercie Jules Nyssen et Gilles Nancy pour leur soutien considérable.

Cette thèse doit beaucoup à Ibrahim Ahamada, Olivier Musy et Jamel Jouini. La plupart des chapitres proviennent de travaux en collaboration. Travailler avec eux a été très enrichissant et je les en remercie.

Dans la mesure où le soutien financier est un élément déterminant dans la décision de poursuite d'études, je remercie la commission de spécialistes de Université de Paris-X pour le poste d'attaché temporaire d'enseignement et de recherche qu'elle m'a confié durant deux années. Il m'a permis de finir ma recherche dans les meilleures conditions.

Merci aux secrétaires de choc du GREQAM & du CEDERS pour leur compétence et leur éternelle bonne humeur.

La confiance et le soutien de mes parents ne m'ont jamais fait défaut. Leur encouragements m'ont été très précieux. Je leur dois tout.

Je voudrais remercier chaleureusement ma femme Nadia pour sa relecture de ma thèse mais surtout pour son infinie patience, sa compréhension ainsi que pour son soutien immense et permanent.

Je suis reconnaissant à mon frère Slim qui m'a toujours soutenu pendant mon séjour à Marseille. Son aide était précieuse.

Mes pensées vont également à la mémoire de mon neveu. Je me souviendrai encore très longtemps de son sourire angélique. Je remercie ses parents ainsi que tous mes frères, mes belles sœurs et ma belle famille pour leurs encouragements.

Je remercie, tout particulièrement, Walid Hichri & Zouhaier M'Chirgui pour leur encouragement et leur enthousiasme.

Je n'oublie pas mes collègues des laboratoires GREQAM et CEDERS. Je tiens à leur exprimer mes remerciements. L'ambiance qui y règne m'a aidé à traverser des moments parfois difficiles grâce à un cercle d'amitiés que j'espère solides et durables.

*Je dédie cette thèse à tous ceux que ma réussite importe ...*

# Introduction Générale

Une trentaine d'années après le premier choc pétrolier, la hausse récente du prix de pétrole a relancé les inquiétudes quant aux tensions inflationnistes qui pourraient renaître dans les pays industrialisés.

L'avenir est par définition incertain. Et il l'est encore plus lorsque l'inflation augmente, parce que le rythme auquel les prix s'accroissent est rarement stable ou prévisible. Cela fausse et rend confuses les informations sur lesquelles les consommateurs, les chefs d'entreprise, les épargnants et les investisseurs fondent leurs décisions économiques. Par conséquent, les agents économiques opèrent plus que jamais dans un univers caractérisé par le changement et l'incertitude.

Les entreprises et les particuliers finissent par consacrer plus de temps et d'argent à essayer de se protéger, ou encore de profiter de l'inflation. Les taux d'intérêt se mettent alors à grimper pour dédommager les épargnants et les prêteurs de la montée attendue de l'inflation et des risques causés par l'incertitude entourant le niveau futur de la hausse des prix. Rien de tout cela ne favorise les investissements productifs. Pendant les périodes de forte inflation des années 1970 et 1980, beaucoup de ressources économiques ont été ainsi englouties dans des opérations de couverture et de placements spéculatifs. Et comme il fallait s'y attendre, les périodes d'expansion inflationniste se sont transformées en récession.

Est-ce que nous sommes aujourd'hui à l'abri de la reproduction d'une telle situation ? Avons-nous forgé des politiques monétaires nous protégeant contre de pareilles éventualités ? Le dispositif de stabilité des prix engagé par la plupart des Banques Centrales est-t-il efficace pour réduire l'incertitude quant à l'avenir ? L'est-il pour éliminer les distorsions qu'engendre l'inflation et pour atténuer les fluctuations du cycle économique ? Autrement dit, avons-nous tué l'inflation ?

La théorie économique n'a cessé d'évoluer, principalement pendant la deuxième moitié du siècle dernier, afin d'offrir un cadre analytique de plus en plus rigoureux pour contribuer à une meilleure connaissance des mécanismes de l'inflation. Seule la maîtrise de ses dynamiques peut nous apporter des éléments de réponse à ces interrogations.

À la suite de la crise de 1929, Keynes (1936) a plaidé en faveur des politiques de stabilisation. Keynes et ses disciples défendaient des politiques de stabilisation sur la base de deux postulats : d'une part, la rigidité à la baisse des prix (et des salaires) et d'autre part, la préférence pour la liquidité. Le récent ralentissement économique mondial semble démontrer toute la pertinence du paradigme keynésien. Toutefois, ce paradigme n'explique pas complètement les causes et la nature ni du niveau faible de l'inflation ni du ralentissement économique actuel. Pour cette raison, il ne faut en tirer aucune conclusion directe, ni sur l'orientation appropriée de la politique monétaire, ni sur son efficacité potentielle.

Une question théorique fondamentale, qui a une incidence capitale sur le rôle stabilisateur de la politique monétaire, a trait à la nature et à la stabilité de la relation entre l'inflation et les fluctuations de la production à court et long termes. Depuis plus de quarante ans, cette question est au cœur du débat théorique et des

études économétriques associées et ce, depuis que Phillips (1958) a observé une relation empirique apparente entre la croissance des salaires et le taux de chômage. Les résultats empiriques des travaux de Phillips ont étendu la connaissance de la politique de stabilisation en choisissant le taux de chômage et le niveau de la production correspondant durablement à un certain niveau d'inflation à long terme.

Samuelson (1947 & 1948) est réputé pour ses travaux sur l'inflation qu'il considère comme l'un des plus grands dangers pour les sociétés occidentales, mais il craint tout autant la psychose de la déflation qui risque d'être tout aussi néfaste. Cherchant des fondements microéconomiques aux questions macroéconomiques, il est considéré comme l'un des initiateurs de la "*synthèse néo-classique*". Lipsey (1960) et Samuelson & Solow (1960) se sont rendus compte immédiatement que le modèle keynésien est limité et qu'il fallait reconsidérer la conception de la courbe de Phillips dans l'édifice du néo-keynésianisme.

L'accélération de l'inflation à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix a contribué à la résurgence d'idées classiques et monétaristes à propos de la relation entre la production et l'inflation et du rôle de la politique monétaire. Chacun de leur côté, Friedman (1968) et Phelps (1968) ont élaboré des théories fondées sur la notion du niveau naturel de la production pour expliquer les écarts de production par rapport à son niveau potentiel. Ces écarts ne résulteraient pas d'une modification de la demande globale, mais d'anticipations erronées sur les prix et d'une mauvaise évaluation des salaires réels. Deux conclusions principales ont été tirées de cette analyse : en premier lieu, il n'existe aucun arbitrage possible entre l'inflation et la croissance sur le long terme. Seul un arbitrage entre l'inflation et la production sur le court terme peut être envisagé. En second lieu, les anticipations et leurs contenus jouent un rôle crucial dans l'apparition des fluctuations affectant



l'inflation et la production sur le court terme et ont une influence déterminante sur l'efficacité de la politique monétaire dans la stabilisation de la production.

Lucas (1972 & 1976) et ses émules ont approfondi la théorie de Friedman et Phelps, parvenant à des conclusions néoclassiques saisissantes quant à la nature de la dynamique de l'économie et au rôle de la politique monétaire. Sur la base des hypothèses selon lesquelles 1) les anticipations sont "rationnelles" et 2) les prix et les salaires sont suffisamment flexibles. Ils ont démontré que les fluctuations de la production autour de son niveau d'équilibre de long terme, imputables aux chocs affectant la demande, sont temporaires et qu'elles présentent une distribution aléatoire et selon toute probabilité, de faible ampleur. Ils ont également montré qu'il n'existe aucun arbitrage de court terme le long de la courbe de Phillips qui puisse être utilisé par la politique monétaire pour stabiliser l'économie. Ils en ont donc conclu qu'il n'était pas nécessaire que la politique monétaire stabilise la production et qu'elle n'était pas en mesure de le faire. En outre, ils ont mis en garde contre le risque d'erreur inhérent aux politiques monétaires et budgétaires excessivement proactives.

Néanmoins, l'ampleur et la durée des fluctuations macroéconomiques dans les années soixante-dix et quatre-vingt ont démontré l'existence de certaines formes de rigidités nominales qui ne peuvent être ignorées. En outre, même si les anticipations des agents économiques devraient, en principe, se former "rationnellement", l'expérience montre qu'elles sont fondées sur des informations limitées sur la structure de l'économie par rapport aux hypothèses des modèles théoriques. Ces faits ont conduit à l'élaboration de théories qui, tout en acceptant les postulats néoclassiques et le "caractère rationnel" des anticipations, impliquent l'existence d'arbitrage de court terme entre inflation et production pouvant être utilisée par les banques centrales.

De plus, des règles précises de politique monétaire ont été proposées et évaluées, notamment par Taylor (1996 & 1999). Elles visent à réduire au minimum les fluctuations des prix et de la production autour des objectifs de la politique économique.

Alors que la crise se prolonge dans les années quatre-vingts (inflation, chômage, déficits publics, faible croissance), on assiste au déclin du keynésianisme pur. Dans un environnement de faible inflation des années quatre-vingt dix, une nouvelle génération de "néo-keynésiens" apparaît. Il s'agit de Gordon (1990), Romer (1991 & 1996), Ball (1994, 1995 & 1997), Roberts (1995 & 1997), Mankiw (1998 & 2000)...Et bien d'autres.

Ils conservent de Keynes deux principes majeurs : l'imperfection du marché et la nécessité de l'intervention de l'Etat. Ils construisent un nouveau keynésianisme qui intègre les acquis de la microéconomie ainsi que les apports des néoclassiques. Joseph Stiglitz, économiste en chef de la banque mondiale, met l'accent sur la nécessité de tenir compte des dynamiques économiques de court terme. Il stipule : "Les nouveaux économistes keynésiens pensent qu'il est pratiquement impossible de concevoir des normes fixes dans une économie en évolution rapide".

Les plus importantes banques centrales dans le monde à l'instar de la Réserve Fédérale Américaine (Fed) et de la Banque Centrale Européenne (BCE), ont choisi d'attacher une importance primordiale au volet concernant la stabilité des prix en soulignant l'impact négatif de l'inflation sur la croissance, comme Issing (2000). Toutes les Banques Centrales se rejoignent dans la définition de leurs choix et stratégies sur le principe de la stabilité des prix. D'une part, le *Federal Reserve Act*, amendé aux États-Unis d'Amérique par la loi sur le plein emploi et la croissance équilibrée de 1978, assigne comme objectifs finaux pour la Fed "*le plein emploi, la stabilité des prix et la modération des taux d'intérêt à long terme*". D'autre part, le Traité

de Maastricht, texte fondateur du projet d'union monétaire et de la BCE, prévoit dans son Article 105 que "*l'objectif principal de la BCE doit être de maintenir la stabilité des prix*". Comme la Fed, la BCE est censée concourir à la bonne marche de l'économie réelle (croissance, emploi...) à condition que la stabilité des prix soit garantie.

Que faut-il entendre par "stabilité des prix" ? En règle générale, il ne s'agit pas de l'inflation zéro, mais d'une inflation faible et non cumulative. On a dû même quantifier cet objectif de stabilité des prix ; C'est ainsi qu'en octobre 1998, la BCE a annoncé que par cette notion elle entendait une "*hausse annuelle de l'indice harmonisé des prix à la consommation (IHPC) inférieure à 2% sur l'ensemble de la zone euro*".

On a le sentiment que le seuil de tolérance de la Fed est un peu au-dessus de celui de la BCE. Ceci peut être expliqué par le fait que la cible européenne de deux points d'inflation par an pour l'ensemble de la zone euro a été retenue par la BCE d'une manière totalement explicite alors que la Fed considère la même cible mais d'une manière plutôt implicite ou discrète.

Au-delà des textes, il faut bien se rendre compte que la conduite de la politique monétaire repose sur deux importants piliers :

- Le premier pilier s'appuie sur un rôle majeur accordé à la monnaie afin de tenir compte de la "*cause finalement monétaire de tout phénomène inflationniste*",

- Le second est constitué d'une "*large gamme d'indicateurs économiques*" qui reflètent la nécessité pour la politique monétaire d'être basée sur une information vaste qui découle de la structure réelle de l'économie.

Ces deux piliers majeurs pour la détermination de la conduite de la politique monétaire peuvent être modélisés dans un programme d'optimisation intertemporelle

du critère de perte des autorités monétaires. Ces autorités qui ont pour objectif de réduire l'écart de l'inflation à sa cible de long terme, ainsi que l'écart du revenu courant au revenu naturel qui traduit la rigidité nominale et leur objectif s'étend également à la modération des taux d'intérêt.

Une grande partie des travaux de cette thèse évoqueront les diverses caractéristiques et spécificités relatives à l'inflation : À savoir, la persistance de l'inflation (chapitre 1), la périodicité des contrats (chapitre 2) ou encore l'évolution du comportement des agents économiques face au changement structurel (chapitres 5 & 6). Ces questions seront abordées autour d'un changement structurel simulé (chapitres 1 & 2) ou un changement structurel réel (chapitres 5 & 6). La discussion des résultats de ces différents exercices sera effectuée en référence à l'ensemble des faits stylisés rendus connus dans la littérature grâce à un ensemble de travaux. L'article référence sur ces faits est celui de Mankiw (2001a). En effet, il existe aujourd'hui un large consensus stipulant que la politique monétaire affecte non seulement des variables nominales comme l'inflation mais aussi des variables réelles comme la production [voir Goodfriend & King (1997)]. Cet intérêt particulier des répercussions d'un choc monétaire sur les variables nominales et réelles est motivé par le fait que l'application de la courbe néo-keynésienne de Phillips sur des données réelles dans la plupart des cas est en désaccord complet avec les faits stylisés [voir Mankiw (2001a)]. Si Kydland et Prescott (1990) déterminent des faits stylisés monétaires dans la perspective d'une théorie qualifiée de réelle, Ball (1994a) se réfère à quelques idées développées par Phelps (1978) pour s'intéresser aux faits stylisés monétaires dans le cadre de la théorie nominale. Ball (1994a) considère un modèle standard de Taylor pour montrer qu'une désinflation entièrement crédible peut occasionner une expansion économique et explique la raison de cette conséquence par la formation des prix qui se fait d'une

manière prospective dans ce modèle. Ainsi, nous nous attendions à une augmentation de la production et à une chute du chômage. Or, Ball (1994a) constate que généralement dans leur pratiques, quand les banques centrales optent pour une désinflation, le résultat typique est la récession plutôt que l'expansion économique. Le désinflation de Volcker aux États-Unis au début des années 80 est l'exemple typique, mais ce phénomène dépasse ce cas particulier. Dans un autre travail, Ball (1994b) estime les coûts de désinflation pour un certain nombre de pays. Pour les vingt-neuf pays concernés par l'étude, il identifie vingt-huit désinflations. Dans vingt-sept cas, Ball (1994b) recense une diminution de l'inflation associée à la baisse de la production au-dessous de son niveau de tendance. Il existe donc une contradiction apparente : les désinflations crédibles occasionnent une expansion économique alors que les désinflations réelles causent des récessions. Ball (1994b) explique ce dernier constat par le fait que les désinflations réelles ne sont pas entièrement crédibles. Par conséquent, Ball (1995) présente une modélisation de la désinflation avec une crédibilité imparfaite. Par ailleurs, Fuhrer & Moore (1995) considèrent la courbe néokeynésienne de Phillips selon le modèle de Taylor. Ils exploitent les données réelles de l'inflation et montrent que cette dernière est une variable très persistante puisque ses autocorrélations sont voisines de l'unité. Ils concluent que le modèle de Taylor est incapable de reproduire le même degré de persistance d'inflation observé sur les données réelles.

Les travaux de cette thèse ont pour objet l'étude des dynamiques de l'inflation autour des changements structurels. Ils s'inscrivent dans les derniers développements de la macroéconomie qui sont regroupés sous le vocable d'économie néokeynésienne. La macroéconomie contemporaine propose en effet un cadre d'analyse de plus en plus rigoureux : Elle cherche d'une manière générale à mieux expliciter les comportements et les mécanismes qui déterminent l'équilibre. Elle tente également

d'expliciter le comportement intertemporel des agents économiques. À ce titre, l'introduction des fondements microéconomiques permet une meilleure compréhension de la formation des variables agrégées. La double prise en compte de ces fondements microéconomiques et de la dimension temporelle a permis d'approfondir l'analyse des états de court et long terme des systèmes économiques.

Dans cette évolution, l'introduction de la courbe néokeynésienne de Phillips dans les nouvelles théories de la politique monétaire apparaît pertinente et prometteuse. D'une part, le recours au modèle microéconomique du comportement des agents économiques enrichit, en rendant la courbe néokeynésienne de Phillips immunisée contre la critique de Lucas, le cadre analytique de la politique monétaire. D'autre part, ces nouveaux modèles de la courbe néokeynésienne de Phillips retiennent de plus en plus la nécessité d'une validation empirique repensée et compatible avec certains faits stylisés qui découlent de la spécificité de l'inflation qui est définie comme étant un phénomène économique persistant à l'intervention des autorités monétaires. En fait, ces deux caractéristiques doivent être validées dans toutes les circonstances et quelque soit le parcours du processus inflationniste en question.

Notre thèse s'articule par conséquent autour d'une question directrice : Quelles sont les performances et les limites des courbes néokeynésiennes de Phillips autour des changements structurels ?

Cette question sera étudiée dans un cadre commun aux différentes modélisations afin de pouvoir comparer les différentes approches. Nous intégrons à l'analyse deux notions : la persistance et la périodicité. Elles seront étudiées à travers leurs effets sur le comportement des dynamiques de l'inflation. L'identification des changements structurels nécessitera un réel investissement dans l'outillage statistique. Nous emploierons l'analyse spectrale dans le cadre des tests de stationnarité. La connaissance

simultanée de la date de rupture et la fréquence qui lui est attribuée justifient une plus-value informationnelle considérable. Seulement, cette approche est incapable de détecter toutes les formes de stationnarité et nécessite la considération simultanée d'autres approches complémentaires. Après avoir développé un cadre théorique commun, dans lequel la simulation d'un choc simple de désinflation nous a révélé des évidences nouvelles concernant la persistance de l'inflation et la périodicité des contrats et suite au développement et l'emploi de l'outillage statistique concernant les tests de stationnarité basés sur la densité spectrale évolutive conjointement avec des tests de stationnarité de la moyenne et de la stationnarité de la variance, nous sommes en mesure de mettre en oeuvre un ensemble de tests empiriques sur l'inflation américaine en exploitant les différents connaissances et résultats obtenus auparavant.

Cette thèse se compose de six chapitres.

### **La Persistance de l'Inflation dans les Modèles Néo-Keynésiens**

La recherche actuelle évaluant l'impact de la politique monétaire se fonde principalement sur un modèle canonique dans lequel la non-neutralité de la monnaie repose sur l'existence de contrats de prix imbriqués [voir Clarida, Gali & Gertler (1999) ou Goodfriend & King (1997)]. Ce type de rigidité a été proposé initialement dans les articles de Taylor (1980) et Calvo (1983) qui stipulent l'utilisation par les agents de contrats à long terme fixant un prix unique pour toute la durée du contrat. La rigidité nominale créée par ce type de contrat permet à la politique monétaire d'avoir un impact sur les variables réelles. Cependant, un certain nombre d'auteurs [voir Ball (1994a), Fuhrer & Moore (1995) et Mankiw (2001)] ont montré l'incapacité de ce type de modèle à reproduire correctement certains faits stylisés majeurs, notamment

la persistance de l'inflation ou la diminution du produit suite à une désinflation. Une réponse à l'absence de persistance a été d'introduire dans la dynamique de l'inflation des éléments retardés [voir Fuhrer & Moore (1995) et Gali & Gertler (1999)] ou même de mettre au rebut l'hypothèse centrale d'existence de contrats à long terme pour la remplacer par l'hypothèse d'une acquisition intermittente de l'information [voir Mankiw & Reis (2002)]. Bien que reposant sur des fondements théoriques très proches, les propriétés dynamiques de ces modèles sont très différentes. Les études sur la politique monétaire optimale se servent alternativement de ces différents modèles sans prendre en considération les différences importantes dans les implications de ces modèles et les faiblesses majeures de certaines spécifications.

Le premier chapitre tente donc de dériver à partir d'un cadre commun les différentes modélisations de la dynamique de l'inflation et de soumettre ensuite chacun des modèles à un même choc monétaire très simple afin de déterminer les spécifications les plus pertinentes. L'étude du degré de pertinence des modèles consiste à comparer les propriétés dynamiques de chaque modèle aux faits stylisés les plus consensuels quant à l'impact empirique des chocs monétaires. Deux points font l'objet d'un consensus extrêmement large. Le premier réside dans l'existence systématique d'une récession économique suite à une politique de désinflation [voir Ball (1994b) et Romer & Romer (1989)]. Le second, capturant l'idée de persistance de l'inflation, réside dans le fait que suite à un choc monétaire, la réponse de l'inflation ne sera que graduelle [voir Fuhrer & Moore (1995), Fuhrer (1995), Christiano, Eichenbaum & Evans (1999) et Mankiw (2001)]. Afin de fournir des implications normatives fiables, un modèle de court terme de la dynamique de l'inflation doit impérativement reproduire ces deux éléments consensuels. En effet, on peut douter de la validité des implications structurelles fournies par un modèle reproduisant sans succès les



réponses de l'économie à des chocs très simples.

Dans un premier temps, sur la base d'un cadre commun, nous dérivons l'équation dynamique de l'inflation pour les différents types d'ajustement néokeynésiens utilisés dans la littérature. Nous soumettrons ensuite ces modèles à un choc monétaire commun et nous comparerons les réponses dynamiques de chaque modèle avec les faits stylisés définis préalablement concernant l'évolution du produit et de l'inflation suite à un choc de ce type.

### **Persistance et Périodicité dans les Modèles à Prix Fixes et à Prix Prédéterminés**

Bien qu'il existe encore des différences entre les approches théoriques relatives à l'analyse des cycles économiques et que le rôle de la politique monétaire dans la stabilisation des fluctuations des prix et la production continue de donner lieu à des points de vue divergents, on a assisté à une forte convergence des approches et des théories. Aujourd'hui, les différences d'ordre conceptuel sont beaucoup moins marquées. On reconnaît à présent la valeur de la plupart des éléments du modèle néoclassique. À titre d'exemple, la notion de la courbe de Phillips verticale à long terme et l'importance fondamentale des anticipations ne sont plus guère contestées. Parallèlement, les caractéristiques néokeynésiennes, telles que les rigidités nominales, continuent de jouer un rôle de premier plan dans l'explication des données. La recherche traitant de la politique monétaire optimale [voir Woodford (2003) pour une revue d'ensemble de ces travaux] souligne que l'impact de la monnaie sur l'inflation et le produit constitue un élément capital.

Dans ce sens, le modèle standard de cette littérature est celui de Calvo (1983). Ce modèle repose sur l'hypothèse que chaque firme peut modifier son prix à chaque

période en fonction d'une probabilité donnée et constante. Néanmoins, ce modèle est incapable de reproduire la persistance de l'inflation trouvée dans les données et ses réponses aux chocs monétaires [voir Fuhrer & Moore (1995) et Mankiw & Reis (2002)]. Dans des travaux d'extension au modèle de Calvo et afin de remédier à ses limites, d'une part, Galí & Gertler (1999) proposent un modèle dont une partie des firmes utilise une règle de fixation des prix tournée vers le passé, et d'autre part, Mankiw & Reis (2002) considèrent des prix prédéterminés en remplacement aux prix fixes du modèle de Calvo, en conservant l'hypothèse d'ajustement probabiliste des contrats à la Calvo.

Si les travaux du premier chapitre supposait que les contrats étaient semestriels, nous nous intéresserons à la variation de la périodicité des contrats dans le cadre des travaux du deuxième chapitre. Nous réserverons un intérêt particulier à la notion de la périodicité en considérant qu'elle est une source principale de la rigidité [voir Taylor (1999), Mankiw & Reis (2002)] et par conséquent de la persistance. L'étude de la périodicité reposera sur le choix du degré de rigidité nominale qui consiste à déterminer la durée pendant laquelle les contrats ne sont pas modifiés.

Nous chercherons à déterminer l'impact du choix de la périodicité dans les modèles à prix fixes et à prix prédéterminés en choisissant arbitrairement une valeur permettant un important degré de persistance. Dans les dix dernières années, la question de la périodicité a suscité un intérêt croissant dans la littérature. Galí & Gertler (1999) estiment les probabilités d'ajustement des prix à chaque période avant de vérifier leur cohérence avec les études sur données microéconomiques. Rotemberg & Woodford (1997) exploitent l'enquête réalisée par Blinder (1994) pour retenir une fixité des prix de trois trimestres. L'article de Taylor (1999) a récapitulé les différentes approches et selon ses propres études sur la durée des contrats de prix, il

suggère une durée moyenne des prix égale à un an. Un certain support empirique appuie cette hypothèse. Sur des données mensuelles, Mankiw, Reis & Wolfers (2003) trouvent qu'une probabilité d'ajustement de 0.08 par mois permet de bien refléter la dynamique des anticipations. Carrol (2003) estime une probabilité de renouvellement de 0.25 par trimestre. Ces deux estimations sont compatibles avec une moyenne d'ajustement comprise entre 10 et 12 mois. Nous allons supposer une durée moyenne similaire pour les modèles à prix prédéterminés pour assurer une comparabilité des résultats [voir Mankiw & Reis (2002) et Trabandt (2003)]

### **Emploi de la Théorie de la Densité Spectrale dans l'Identification des Changements Structurels**

Les fluctuations de l'inflation résultent, pour une large part, du délai nécessaire pour que les économies reviennent à l'équilibre après s'en être écartées. Une partie des fluctuations à court terme résulte de modifications du niveau de l'inflation d'équilibre, mais sur l'ensemble du cycle, les économies fluctuent autour de leur niveau d'équilibre parce que les mécanismes de marché fonctionnent lentement et à des rythmes différents selon les pays. Les cycles résultent de la réaction de l'économie à des séries de chocs et il est possible qu'ils soient générés par une série de chocs indépendants et aléatoires très fréquents mais de faible ampleur. Les chocs peuvent être autonomes, mais ils sont également susceptibles de résulter des mesures prises par les responsables de la politique monétaire. La nature du cycle, sa durée et son amplitude dépendront à la fois des réponses de l'économie, des réactions des autorités monétaires face aux chocs mais aussi des changements dans le comportement des agents économiques face à la conjoncture économique.

S'il est toujours difficile d'évaluer le positionnement d'un phénomène économique

dans son cycle, il est important de trouver des moyens d'y parvenir. Il existe de nombreuses méthodes d'extraction des cycles et toutes présentent des avantages et des inconvénients théoriques relatifs. Le choix de l'emploi de l'analyse spectrale est justifié par le rôle important que cette analyse peut jouer dans les études quantitatives des cycles des affaires en économie. Bien que les premières utilisations de cet outil statistique aient été basées sur la décomposition des séries temporelles selon une composante tendancielle et une composante cyclique, la théorie spectrale a considérablement évolué pour devenir un outil très puissant qui peut servir dans d'autres applications telles que les études de stationnarité et l'identification des changements structurels.

Il est à constater que les économistes connaissent mal et utilisent peu l'analyse fréquentielle en général et l'analyse spectrale. L'influence du célèbre livre de Box & Jenkins (1970) semble rendre populaire le domaine temporel au détriment du domaine fréquentiel. Aujourd'hui, on trouve de plus en plus des travaux impliquant l'analyse spectrale dans la littérature, par exemple Perron & Ng (1998), Diebold, Ohanian & Berkowitz (1998), Berkowitz (2001) parmi de nombreux autres auteurs. Dans le troisième chapitre, nous présenterons dans la première partie, les théorèmes clefs qui fondent l'analyse spectrale classique<sup>1</sup> et l'analyse spectrale évolutive. Dans la seconde partie du troisième chapitre, nous recenserons les diverses techniques d'estimation de la densité spectrale des données stationnaires puis des données non stationnaires. Ce chapitre représente une revue de littérature assez représentative de l'analyse spectrale, de ses fondements et de ses pratiques.

Dans le quatrième chapitre, nous exploiterons la notion de la densité spectrale is-

---

<sup>1</sup>Le terme "classique" est employé pour indiquer le maintien de l'hypothèse de la stationnarité comme hypothèse de travail par opposition aux développements des théories spectrales modernes qui tendent à relâcher une telle hypothèse.

sue des processus non stationnaires, pour proposer des tests de stationnarité que nous appliquerons sur l'inflation américaine. Les tests proposés sont non paramétriques et visent essentiellement l'identification des points de rupture multiples. Le choix de la densité spectrale, comme outil statistique pour la détection des changements structurels, est justifié par le fait que cet outil permet d'élaborer des tests de stationnarité puissants et sensibles à diverses formes de non-stationnarité. Les tests de stationnarité tels que le test KPSS (1992) sont définis habituellement dans le domaine temporel ; Ils sont généralement destinés à des formes particulières d'instabilité. Également, l'application de ce genre de test de non-stationnarité basé sur la densité spectrale évolutive peut fournir une valeur ajoutée informationnelle non négligeable et très souhaitable surtout pour aborder des questions macroéconomiques (à l'exemple de la dynamique de l'inflation dans le cadre des travaux de cette thèse). Cette valeur ajoutée consiste dans le fait, qu'en testant la non-stationnarité de la densité spectrale du processus étudié, non seulement nous identifions les différents points de rupture (s'ils existent) mais en plus, nous pouvons nous prononcer quant au terme de cette rupture (court, moyen ou long terme) puisque nous attribuons une unique fréquence à chaque point de rupture identifié. Il est particulièrement important de savoir dans le cadre de notre étude portant sur les dynamiques de l'inflation si le point de rupture détecté représente une légère perturbation et un simple accident de parcours ou au contraire, il signifie un profond changement structurel qui touche la politique monétaire et/ou le comportement des agents économiques.

Bien que nous réservons un intérêt particulier à l'emploi de la densité spectrale, nous avons besoin d'explorer d'autres méthodes à la quête de validations empiriques complémentaires aux résultats obtenus par cet outil statistique très puissant. Ce besoin est éprouvé puisque l'hypothèse fondamentale d'utilisation de la densité spec-

trale évolutive dans le cadre des tests d'identification des changements de régime est celle de la stabilité de la moyenne. Il est donc possible que des formes d'instabilité de la moyenne du processus étudié ne soient pas détectées par les tests de stationnarité basés sur la densité spectrale évolutive. Une limite qui nous oblige d'élargir le champ de l'identification des points de rupture susceptibles d'être des changements de régime vers d'autres formes de non stationnarité.

Par ailleurs, nous utiliserons d'autres techniques d'identification de rupture. Il s'agit des tests d'instabilité de la moyenne et de la variance. En effet, la littérature statistique et économétrique recèle un volume important d'études reliées au problème de changement structurel. Premièrement, nous nous proposons d'étudier l'instabilité de la variance. Les travaux fondateurs sont ceux de Hsu, Miller & Wichern (1974) qui proposent une formulation alternative à la distribution Pareto des modèles des rendement des actions. Booth & Smith (1982) utilisent un ratio bayésien pour décider quand la série présente un changement de variance à une date inconnue. L'approche retenue pour tester l'instabilité de la variance utilise les sommes cumulées des carrés. C'est une approche basée sur une version centrée de la méthode des sommes cumulées des carrés présentée par Brown, Durbin & Evans (1975). La recherche est effectuée selon un algorithme itératif qui permet d'identifier les éventuels changements de variance. Secondement, en ce qui concerne l'instabilité de la moyenne, les travaux pionniers sont ceux de Chow (1960), Quandt (1958) et Barten & Salvat-Bronsard (1970) qui considèrent la date de rupture dans leurs approches comme étant connue. Depuis, l'agenda des recherches s'est dirigé vers une modélisation où cette date de rupture est traitée comme une variable inconnue. Le travail classique de Brown, Durbin & Evans (1975) a généralisé l'approche de type CUSUM aux modèles de régressions linéaires. Bhattacharya (1994) présente un survol des développements en

statistique. Dans un premier temps, nous allons sélectionner les points de rupture grâce aux critères d'information et ensuite, nous comparerons ces résultats avec ceux obtenus en appliquant une variété de tests de Bai et Perron qui considèrent dans leur approche la date de changement structurel comme étant inconnue.

### **Régime Monétaire & Stabilité des Paramètres de la Courbe de Phillips Hybride**

L'inflation américaine a été stable et faible au cours des années 60, puis s'est accrue au cours des années 70, avec un pic à 11.8% au milieu de la décennie. L'arrivée de Paul Volcker à la tête de la Réserve Fédérale en 1979 a été suivie d'une politique de désinflation efficace, le taux d'inflation passant de 10.8% en 1980 à 3% en 1983, puis restant faible durant le reste de la décennie. Au cours des années 90, l'inflation est restée globalement stable dans une fourchette allant de 1 à 3%, ce qui englobe la plupart des définitions de la stabilité des prix. Il existe donc un consensus sur le fait que la performance macroéconomique des États-Unis s'est sensiblement améliorée à partir des années 80. La raison la plus fréquemment invoquée est celle d'un changement de comportement de la banque centrale américaine qui a poursuivi au début des années 80 une politique agressive de désinflation, puis a cherché à conserver la stabilité des prix acquise. Goodfriend (2003) qualifie cette politique de cible d'inflation implicite et la crédibilité de la Réserve Fédérale à poursuivre une politique d'inflation basse s'est progressivement accrue, notamment suite à l'arrivée d'Alan Greenspan. Le niveau d'inflation ciblé n'est pas explicite du point de vue quantitatif, le but à atteindre étant celui de la stabilité des prix, définie par Greenspan (1990) comme une situation durant laquelle "le taux d'évolution anticipé du niveau général des prix cesse d'être un facteur de décision dans les choix des individus et

des firmes".

Plusieurs études récentes suggèrent que la persistance de l'inflation s'est modifiée au cours du temps aux États-Unis. Benati (2002) détecte plusieurs modifications des propriétés dynamiques de l'inflation au cours de l'histoire monétaire des États-Unis. Chacune de ces modifications est associée à une modification du régime monétaire en place. Ball (2000) montre que le degré de persistance de l'inflation américaine était très faible durant le régime monétaire précédant la première guerre mondiale et beaucoup plus élevé lors du régime postérieur à la seconde guerre mondiale. Même durant cette période, il semble que le degré de persistance ait été variable. Cogley & Sargent (2001) montrent que la persistance s'est accrue au début des années 70 et qu'elle est restée stable au cours de cette décennie avant de décroître graduellement à partir des années 80. Levin & Piger (2004) obtiennent des résultats similaires. La variation historique de la persistance reste néanmoins ouverte au débat, car Pivetta & Reis (2004) trouvent au contraire que le degré de persistance est globalement stable depuis l'après guerre.

Le travail que nous mènerons se situe en parallèle de cette littérature. Il consiste à étudier l'évolution de la persistance en fonction de l'évolution des coefficients estimés de la courbe de Phillips hybride fondée sur la modélisation de Galí & Gertler (1999). Nous estimons les coefficients pour chaque régime monétaire étudié, en utilisant les données américaines de 1960 à 1998. Certains auteurs ont perçu la modification de la persistance comme résultant uniquement de la modification du processus dynamique de la variable pilote "*driving variable*" [voir Clarida, Galí & Gertler (2000)]. Nous essayerons de voir si les modifications survenues dans la conduite de la politique monétaire ont également affecté les paramètres de la courbe de Phillips en supposant une réaction endogène des agents au régime monétaire.



## Résolution des Modèles Multivariés à Anticipations Rationnelles & Estimation Structurelle d'un Modèle Néo-Keynésien Général

L'inclusion des anticipations rationnelles pose un problème à l'économiste qui analyse les politiques monétaires depuis que Sargent & Wallace (1975) ont montré que la politique anticipée devenait totalement inefficace dans un contexte pareil. Pour redonner une utilité aux politiques économiques, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires, en particulier sur la rigidité des prix. Les auteurs néo-keynésiens se sont donc efforcés de trouver des justifications théoriques à la rigidité des prix et de les inclure dans les modèles macroéconomiques, en économie fermée. L'intérêt théorique de cette modélisation réside dans les hypothèses formulées sur l'origine d'une éventuelle rigidité dans l'ajustement des prix des biens. Comme nous l'avons signalé auparavant, ce sont les travaux de Calvo (1983) qui servent de référence. Des modèles comparables sont obtenus pour l'inflation, à l'exemple notamment de Galí & Gertler (1999).

Le premier aspect abordé par ce chapitre sera la résolution des modèles à anticipations rationnelles dans le cas multivarié. Cette opération de résolution présente une grande difficulté tant au niveau mathématique qu'au niveau empirique. Elle est incontournable pour pouvoir exploiter une analyse empirique cohérente avec la critique de Lucas. Nous nous efforcerons d'exposer une revue des méthodes les plus récentes de résolution d'un tel système. Nous envisagerons de présenter un modèle multivarié dans le cas le plus général en exposant les cas particuliers qui lui sont associés.

Par ailleurs, nous mettrons en œuvre la démarche de la résolution des modèles multivariés à anticipations rationnelles puisque nous retiendrons un modèle

néokeynésien plus complet en considérant d'une part, une règle monétaire afin de refléter le comportement des autorités monétaires et d'autre part une équation (IS). Le système obtenu comporte d'abord, une courbe néokeynésienne de Phillips qui représente l'offre globale. Ensuite, l'équation (IS) pour représenter la demande globale. L'équation (IS) est marquée par la persistance de l'écart de production qui est prise en considération par l'introduction des effets d'habitude dans la fonction d'utilité [voir Abel (1990) et Fuhrer (2000a & 2000b)]. Enfin, une règle de conduite de la politique monétaire à la manière de Clarida, Galí & Gertler (2000).

Afin de tester la performance empirique de ce modèle, nous estimerons les paramètres structurels du modèle sur des données américaines en considérant dans un premier temps, les deux sous périodes d'avant et d'après fin 1981 et ensuite les deux sous périodes d'avant et d'après fin 1990. Nous utiliserons la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance en informations complètes.

**Première partie**

**Chocs Monétaires et Persistance  
de l'Inflation<sup>2</sup>**

---

<sup>2</sup>Cette partie est issue des travaux de Ben Aïssa & Musy (2004a & 2004b).

# Chapitre 1

## La Persistance de l’Inflation dans les Modèles Néo-Keynésiens

### Introduction

La recherche récente sur l’impact de la politique monétaire utilise fréquemment un ensemble d’équations réduites issues d’un comportement d’optimisation de la part des agents privés. La non neutralité de la monnaie est expliquée par l’existence de rigidités nominales empêchant les entreprises d’ajuster continuellement leurs prix en fonction des conditions économiques. L’article fondateur de Fischer (1977) suppose que cette rigidité provient d’une prédétermination des prix. Les prix sont prédéterminés pour la période allant de  $t$  à  $(t+i)$  si leur trajectoire au cours de cette période est fixée à la date  $t$  [voir Blanchard & Fischer (1989)]. Cette hypothèse s’étant révélée insatisfaisante, Taylor (1980) et Calvo (1983) l’ont remplacée par celle de fixité des prix. Les prix sont fixes si au cours d’une période ils sont prédéterminés et constants. Roberts (1995) a montré que les approches à prix fixes de Taylor et de Calvo généraient la même relation entre l’inflation et le produit. Cette relation est connue sous le nom de “courbe de Phillips néo-keynésienne” [voir Clarida, Galí & Gertler (1999)]. La caractéristique principale de la courbe de Phillips néo-keynésienne est de représenter l’inflation comme un phénomène essentiellement tourné vers le futur

“*forward-looking*” résultant du comportement d’optimisation dynamique des firmes.

Ball (1994a) et Mankiw & Reis (2002) ont montré que cet aspect “*forward-looking*” exclut toute persistance de l’inflation et aboutit à la prédiction qu’une politique de désinflation crédible est sans coût pour le produit. Ceci est en contradiction avec deux faits stylisés consensuels parmi les économistes et les banquiers centraux [voir Mankiw (2001)]. Le premier est qu’une politique de désinflation entraîne toujours une récession [voir Ball (1994b), Romer & Romer (1989)]. Le second, qui capture l’idée de persistance de l’inflation, est que la réponse de l’inflation à un choc monétaire est retardée et graduelle [voir Mankiw (2001)].

Bien que la version purement orientée vers le futur, “*forward-looking*” de la courbe de Phillips néo-keynésienne soit encore largement utilisée, certains auteurs ont tenté de la modifier en y introduisant des éléments d’inflation retardée afin d’accroître la persistance de cette variable [voir Fuhrer & Moore (1995) et Galí & Gertler (1999)]. Dans le même but, Mankiw & Reis (2002) ont remplacé l’hypothèse d’une rigidité des prix par celle d’une rigidité de l’information, reprenant l’hypothèse de Fischer de prédétermination des prix.

Deux essais sont effectués sur les dynamiques de l’inflation : Premièrement, nous dérivons les dynamiques de l’inflation issues des différentes hypothèses d’ajustement des prix rencontrées dans la littérature néo-keynésienne. Pour chaque modèle nous calculons la réponse de l’inflation et du produit suite à un choc sur le taux de croissance de la masse monétaire. Dans un deuxième essai sur les dynamiques de l’inflation, nous évaluons l’impact du choix de la périodicité sur le degré de persistance dans le modèle à prix rigides de Galí & Gertler (1999) et dans le modèle à information rigide de Mankiw & Reis (2002). Étant donné que les firmes ajustent leur prix ou leur information en moyenne chaque année, la périodicité du modèle

(par exemple l'utilisation d'un modèle mensuel plutôt que trimestriel) conditionne les réponses dynamiques de l'inflation suite à un changement sur le taux de croissance de la masse monétaire. Le signe de la relation périodicité-persistance dépend du modèle considéré.

La littérature actuelle sur l'impact de la politique monétaire utilise ainsi divers modèles de dynamique de l'inflation qui se distinguent par la forme de rigidité de prix sous-jacente. Nous développons dans un cadre commun les équations dynamiques de l'inflation résultant des différentes hypothèses de la littérature néo-keynésienne sur les rigidités de prix. Ces courbes de Phillips sont ensuite soumises à l'exercice consistant à étudier l'impact d'une variation négative du taux de croissance de la masse monétaire. Les réponses des variables de l'inflation et de la production sont comparées aux faits stylisés énoncés. Le fait que nous partions toujours du même cadre de base garantit la comparabilité des résultats. Bien qu'illustratif, cet exercice peut être instructif car un modèle macroéconomique de court terme ne peut prétendre fournir des implications normatives fiables seulement si la dynamique qu'il génère est compatible avec certains faits empiriques. En particulier, il doit reproduire correctement la réponse de l'économie à des chocs simples.

## 1 Présentation du cadre commun

Nous suivons une procédure standard en deux étapes. La première consiste à déterminer le niveau auquel une firme fixerait son prix si celui-ci était entièrement flexible.

Nous présentons le modèle de l'économie qui servira de base commune pour les différentes simulations. L'économie est composée d'un continuum de ménages identiques indicés par  $i$ ,  $i \in [0, 1]$ . Les ménages sont à la fois travailleurs et entrepreneurs

[voir Blanchard et Fischer (1989)]. Le ménage  $i$  produit le bien  $i$  en utilisant du travail, vend ce bien aux autres ménages et consomme les biens produits par les autres agents. Les biens sont différenciés. Il n'y a pas de capital, et la consommation agrégée de chaque bien est égale à la production agrégée de ce bien. Le produit global est déterminé par la consommation globale :

$$Y_t = C_t \tag{1.1}$$

On peut montrer que la consommation  $C_{i,t}$  d'un agent individuel est une fonction CES agrégeant la consommation des différents biens consommés par l'agent :

$$C_{i,t} = \left[ \int_0^1 C_{ij,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1.2}$$

où  $\sigma > 1$  est l'élasticité de substitution entre les différents biens.  $M_i/P$  est le niveau des encaisses réelles de l'agent,  $L_i$  son offre de travail. Soient  $W_i$  le salaire versé par unité de travail. et  $\beta$  un paramètre de préférence des agents lié à la désutilité du travail. Les préférences du ménage représentatif à la date  $t$  sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U_{i,t} \left( C_{i,t}, \frac{M_{i,t}}{P}, L_{i,t} \right) = \ln C_{i,t} + \ln \left( \frac{M_{i,t}}{P_t} \right) - \frac{L_{i,t}^\beta}{\beta} \tag{1.3}$$

L'épargne d'un ménage est détenue sous forme de monnaie  $M_i$  ou de titres  $B_i$  rémunérés au taux  $r_t$ . Les agents détiennent les entreprises et perçoivent les profits  $\pi_i$ , ainsi que des transferts forfaitaires  $T_i$  distribués par la banque centrale. La contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent prend la forme :

$$C_{i,t} = \frac{W_{i,t}}{P_t} L_{i,t} + \frac{\pi_{i,t}}{P_t} + \frac{T_{i,t}}{P_t} - \left( \frac{M_{i,t} - M_{i,t-1}}{P_t} \right) - \left( \frac{B_{i,t} - B_{i,t-1}(1+r_t)}{P_t} \right) \tag{1.4}$$

Chaque ménage choisit son offre de travail, la quantité d'encaisses monétaires et la quantité de titres qu'il souhaite détenir. Après arrangements, on obtient les conditions d'optimalité suivantes :

$$\frac{W_{i,t}}{P_t} = C_{i,t} L_{i,t}^{\beta-1} \quad (1.5)$$

$$\frac{M_{i,t}}{P_t} = C_{i,t} \frac{(1+r_t)}{r_t} \quad (1.6)$$

Les firmes évoluent dans un marché où la concurrence est monopolistique, les biens produits par chaque firme étant imparfaitement substituables. Ainsi, la firme représentative  $i$  fait face à la fonction de demande :

$$Y_{i,t} = \left( \frac{P_{i,t}}{P_t} \right)^{-\sigma} Y_t \quad (1.7)$$

La technologie de production est à rendements constants sur le facteur travail :

$$Y_{i,t} = L_{i,t} \quad (1.8)$$

La fonction de coût de la firme prend la forme suivante :

$$W_{i,t} (Y_{i,t})^{1+\varphi} \quad (1.9)$$

avec  $\varphi$  un paramètre de technologie tel que le coût marginal de production soit croissant. Toutes les firmes sont identiques et effectueront les mêmes choix à l'équilibre. Cette dernière équation, combinée à (1.5), (1.7) et (1.8) permet de définir le prix d'équilibre [voir l'Annexe I pour plus de détails concernant la dérivation du prix optimal de la firme  $i$ ] que fixera la firme  $i$  :

$$P_{i,t}^* = \left( \frac{\sigma(1+\varphi)}{\sigma-1} \right)^{1/(1+\sigma\varphi)} P_t Y_t^{(\varphi+\beta)/(1+\sigma\varphi)} \quad (1.10)$$

Il est possible à présent de déterminer le niveau auquel une firme fixerait son prix si celui ci était entièrement flexible. En négligeant la constante, ce prix optimal peut



être obtenu [voir Blanchard & Fischer (1989) et Romer (1996)] en appliquant le log sur l'équation (1.10), soit :

$$p_{i,t}^* = p_t + \phi y_t \quad (1.11)$$

où  $p_t$  est le niveau général des prix et  $\phi$  le degré de rigidité réelle et avec  $\phi = (\varphi + \beta) / (1 + \sigma\varphi)$ , et est inférieur à 1 par hypothèse. Plus  $\phi$  est faible (i.e. plus la rigidité réelle est forte), plus les firmes chercheront à garder leurs prix relatifs constants, en tenant peu compte des conditions macroéconomiques. Il est possible de supposer nulle l'élasticité de la demande de monnaie par rapport au taux d'intérêt afin d'obtenir une équation de demande globale semblable à l'équation quantitative. Donc, l'output gap  $y_t$  est déterminé à partir d'une équation quantitative où la vitesse de circulation de la monnaie est constante. En effet, les équations (1.6) et (1.7), une fois passées en log, permettent d'obtenir :

$$y_t = m_t - p_t \quad (1.12)$$

L'étape suivante consiste à spécifier des contraintes sur l'ajustement dynamique des prix. Si ceux-ci étaient parfaitement flexibles,  $p_t^*$  serait le prix fixé à chaque période par les firmes. La symétrie de l'équilibre aurait pour conséquence l'égalité entre le niveau des prix et celui de la masse monétaire. Les déviations du produit seraient systématiquement nulles. Taylor (1999) favorise cependant la prise en compte de rigidités dans l'ajustement dynamique des prix. Ces rigidités nominales ont pour conséquence de ne pas permettre aux firmes d'être en mesure de fixer à chaque période leur prix optimal défini par (1.11). Il convient alors de faire la distinction entre le prix qu'une firme souhaite mettre en œuvre en  $t$ ,  $p_t^*$ , et le prix qui est effectivement en vigueur à cette même date,  $x_t$ . On peut distinguer essentiellement

deux catégories de rigidité des prix<sup>1</sup>. La première, issue des travaux de Taylor (1980), stipule l'existence de prix fixes, c'est à dire qu'un prix unique est en vigueur durant toute la durée d'un contrat de prix. L'autre hypothèse [voir Fischer (1977)] stipule l'existence de prix prédéterminés : les prix sont également signés à l'avance mais peuvent être différents pour chacune des périodes comprises dans le contrat. Les choix de fixation des prix se font en début de période, après observation de la masse monétaire courante et l'annonce de sa trajectoire future. Nous présentons dans cette section les différentes règles d'ajustement utilisant cette distinction.

## 2 Les règles d'ajustement à prix fixes

### 2.1 Prix fixes pour une durée aléatoire (Calvo, 1983)

Les études empiriques montrent en effet qu'en moyenne les prix sont fixés pour une durée annuelle, mais les durées individuelles sont variables [voir Taylor (1999)]. Le modèle de Calvo (1983) permet de reproduire ces deux aspects de la fixation des prix : la durée moyenne des contrats est de deux périodes (le modèle est semestriel) mais la durée individuelle des contrats est aléatoire. À chaque période, une firme a une probabilité constante  $\lambda$  de pouvoir modifier son prix. Soit  $x_t$  le prix fixé par une firme modifiant son prix à la date<sup>2</sup>  $t$  :

$$x_t = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda)^j E_t p_{t+j}^* \quad (1.13)$$

Le prix fixé est une moyenne pondérée des prix optimaux actuels et futurs. Ces derniers sont escomptés en fonction de la probabilité de pouvoir réajuster son prix

---

<sup>1</sup>Une autre règle a été proposée par Rotemberg (1982), qui suppose l'existence de coûts quadratiques dans les ajustement de prix. La dynamique de l'inflation générée est identique à celle au modèle à prix fixes de Calvo (1983).

<sup>2</sup>Le paramètre d'actualisation est arbitrairement fixé à 1, ce qui n'a pas d'incidence sur les résultats obtenus.

plutard. Les firmes modifiant leur prix à une même date fixent le même prix. Le niveau général des prix est une moyenne pondérée des prix en cours dans l'économie.

$$p_t = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda)^j x_{t-j} \quad (1.14)$$

Avec (1.11), il est possible de déterminer la dynamique de l'inflation dans cette économie.

$$\pi_t = E_t \pi_{t+1} + \varkappa y_t \quad (1.15)$$

où  $\pi_t \equiv p_t - p_{t-1}$  et  $\varkappa = (\phi \lambda^2) / (1 - \lambda)$ . L'inflation est une fonction positive de l'output gap courant et de l'inflation anticipée à la période suivante. Cette spécification est tournée vers le futur. Si la banque centrale est crédible, suite à un choc monétaire le taux d'inflation saute immédiatement sur sa nouvelle valeur d'équilibre.

## 2.2 Prix fixes pour une durée déterminée (Taylor, 1980)

La durée individuelle des prix est de deux périodes pour toutes les firmes. Ces dernières sont réparties en deux cohortes de taille identique se différenciant par la date de la fixation de leur contrat de prix. La première cohorte fixe son prix les dates paires et l'autre les dates impaires. Soit  $x_t$  le contrat de prix fixé en  $t$ , en vigueur lors des périodes  $t$  et  $(t + 1)$ . Le prix fixé par une firme est le suivant :

$$x_t = (1/2) (p_t^* + E_t p_{t+1}^*) \quad (1.16)$$

Le niveau général des prix est une moyenne des prix fixés par chaque cohorte.

$$p_t = (1/2) (x_t + x_{t-1}) \quad (1.17)$$

(1.11) et (1.17) permettent de réécrire (1.16) comme :

$$x_t = (1/2) (x_{t-1} + E_t x_{t-1}) + \phi (y_t + E_t y_{t+1}) \quad (1.18)$$

La courbe de Phillips issue de cette structure d'imbrication des prix prend alors la forme suivante :

$$\pi_t = E_t \pi_{t+1} + 2\phi(\tilde{y}_t) + \eta_t \quad (1.19)$$

où  $\tilde{y}_t = y_{t-1} + E_{t-1}y_t + y_t + E_t y_{t+1}$  est une somme des écarts de production et  $\eta_t = E_{t-1}\pi_t - \pi_t$  une erreur d'anticipation. La littérature néglige souvent cette erreur d'anticipation et pose  $\tilde{y}_t = y_t$  [voir Roberts (1995)]. Il en résulte une forme identique à celle de Calvo. Néanmoins, la prise en compte de l'erreur d'anticipation permet de réécrire (1.19) comme :

$$\pi_t = (1/2)(E_{t-1}\pi_t + E_t\pi_{t+1}) + \phi(y_{t-1} + E_{t-1}y_t + y_t + E_t y_{t+1}) \quad (1.20)$$

L'inflation est alors également fonction d'une anticipation passée sur l'inflation courante, ce qui crée un effet d'inertie suite à une surprise monétaire, les termes retardés de l'output gap faisant perdurer cet effet au delà du choc initial. La réponse de l'inflation à un choc est donc sensiblement différente de celle de Calvo.

L'apparente similitude avec le modèle de Calvo n'est obtenue dans le modèle que pour une durée des contrats de deux périodes. Alors que la forme de la courbe de Phillips chez Calvo est invariante à la durée des contrats, la courbe de Phillips issue de Taylor se modifie avec cette durée. Si par exemple les contrats durent trois périodes, elle devient :

$$\begin{aligned} \pi_t = & (1/3)(E_t\pi_{t+1} + E_{t-1}\pi_t + E_{t-2}\pi_{t-1}) \\ & + (1/6)(E_t\pi_{t+2} + E_{t-1}\pi_{t+1} + E_{t-2}\pi_t) - (1/2)\pi_{t-1} \\ & + \frac{\phi}{6} \left[ \begin{array}{l} y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + E_t(y_{t+1} + y_{t+2}) \\ + E_{t-1}(y_t + y_{t+1}) + E_{t-2}(y_{t-1} + y_t) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Les éléments d'information imparfaite apparaissant dans la structure de Taylor deviennent beaucoup plus explicites à mesure que la durée des contrats augmente.

### 2.3 Prix fixes pour une durée aléatoire et anticipations adaptatives (Galí & Gertler, 1999)

Afin d'introduire de la persistance, Galí & Gertler (1999) ont modifié le modèle de Calvo (1983) en supposant qu'une partie des agents pouvant changer leur prix utilise une règle de fixation des prix tournée vers le passé. Le niveau général des prix est toujours donné par (1.14). Cependant, les firmes ne sont plus toutes identiques et l'indice des prix fixé en  $t$  s'écrit de la manière suivante :

$$x_t = (1 - \omega) p_t^f + \omega p_t^b \quad (1.21)$$

où  $p_t^b$  est le prix fixé par les firmes tournées vers le passé,  $\omega$  la proportion de ces firmes dans l'économie et  $p_t^f$  le prix fixé par les firmes fixant leur prix d'une manière identique au modèle de Calvo.

$$p_t^f = \lambda p_t^* + (1 - \lambda) E_t p_{t+1}^f \quad (1.22)$$

Les firmes tournées vers le passé fixent leur prix en utilisant la moyenne des prix fixés à la période précédente, corrigée par l'inflation, soit :

$$p_t^b = x_{t-1} + \pi_{t-1} \quad (1.23)$$

On obtient alors la courbe de Phillips suivante :

$$\pi_t = \gamma^f E_t \pi_{t+1} + \gamma^b \pi_{t-1} + \chi y_t \quad (1.24)$$

avec  $\gamma^f = (1 - \lambda) / \psi$ ,  $\gamma^b = \omega / \psi$ ,  $\chi = \lambda^2 \phi (1 - \omega) / \psi$  et  $\psi = 1 - \lambda + \omega$ . En se servant des résultats de Sahuc (2002) et de Jondeau & Le Bihan (2001), il est possible de supposer qu'approximativement la moitié des agents fixent leur prix à partir de la règle (1.23), ce qui donne dans ce cas la forme suivante :

$$\pi_t = (1/2) (E_t \pi_{t+1} + \pi_{t-1}) + \chi y_t$$

L'intégration d'un retard d'inflation accroît le degré de persistance de celle-ci suite à un choc monétaire. Cette courbe de Phillips est très utilisée dans l'étude de la politique monétaire.

## 2.4 Prix fixes stipulés en termes réels (Fuhrer & Moore, 1995)

Critiquant le manque de persistance de l'inflation dans le modèle de Taylor, Fuhrer & Moore (1995) supposent que les agents stipulent leurs contrats en termes réels relatifs et non plus en termes nominaux relatifs. Selon Fuhrer et Moore, cette hypothèse revient à réécrire l'équation (1.18) de la manière suivante :

$$x_t - p_t = (1/2)(x_{t-1} - p_{t-1} + E_t x_{t+1} - E_t p_{t+1}) + \phi(y_t + E_t y_{t+1}) \quad (1.25)$$

Les autres hypothèses sont identiques à celles du modèle de Taylor. La dynamique de l'inflation devient alors :

$$\pi_t = (1/2)(\pi_{t-1} + E_t \pi_{t+1}) + \phi(\tilde{y}_t) + (1/2)\eta_t \quad (1.26)$$

où  $\tilde{y}_t$  et  $\eta_t$  sont définis comme chez Taylor. L'introduction d'un élément retardé permet d'introduire plus d'inertie dans la dynamique de l'inflation. Cette courbe de Phillips est généralement considérée comme équivalente à celle du modèle de Galí et Gertler lorsque  $\gamma_b = \gamma_f = 1/2$ . Néanmoins, comme pour le modèle de Taylor, cette apparente similitude résulte des hypothèses faites sur l'erreur d'anticipation  $\eta_t$ . Il est en effet possible de réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\pi_t = (1/3)(\pi_{t-1} + E_{t-1}\pi_t + E_t\pi_{t+1}) + (2\phi/3)(\tilde{y}_t) \quad (17)$$

Quelles que soient les valeurs des paramètres  $\gamma_b$  et  $\gamma_f$  chez Galí et Gertler, les deux formes sont différentes. Pour  $\gamma_b = \gamma_f = 1/2$ , la persistance de l'inflation dans le

modèle de Galí et Gertler est supérieure à celle de Fuhrer et Moore [voir l'Annexe]. Comme chez Taylor, la forme de la courbe de Phillips se modifie avec la durée des contrats alors qu'elle reste invariante chez Galí et Gertler.

### 3 Les règles d'ajustement avec prix prédéterminés

Le second type de contrats de long terme utilisé consiste à supposer que lorsqu'une entreprise fixe son contrat de prix à la période  $t$ , elle détermine une trajectoire de prix pour les périodes allant de  $t$  à  $(t + n)$ , chaque prix pouvant être différencié. Si les coûts de modification des prix sont nuls mais qu'il existe des coûts contractuels survenant chaque fois qu'une firme négocie un contrat, alors la prédétermination des prix peut être justifiée, les firmes ne souhaitant pas renégocier leurs contrats à chaque période. Lorsqu'elles sont en mesure de le faire, les firmes vont donc, à partir de l'information disponible, décider d'une trajectoire de prix futurs. La durée moyenne des contrats reste de deux périodes. On note  $x_{t,t+i}$  le prix fixé à la date  $t$  pour la période  $t + i$ .

#### 3.1 Prix prédéterminés pour deux périodes (Fischer, 1977)

Les contrats de prix sont imbriqués à la façon du modèle de Taylor et prédéterminés pour deux périodes. L'objectif de la firme est de minimiser l'écart entre les prix fixés et ses prix optimaux.

$$\underset{x_{t,t}; x_{t,t+1}}{Min} (x_{t,t} - p_t^*)^2 + \beta E_t (x_{t,t+1} - p_{t+1}^*)^2$$

Le niveau général des prix à la date  $t$  est donné par :

$$p_t = (1/2) (x_{t-1,t} + x_{t,t}) \tag{1.27}$$

La dynamique de l'inflation est alors la suivante :

$$\pi_t = [\phi / (1 + \phi)] \Delta m_t + [1 / (1 + \phi)] (E_{t-1} m_t - E_{t-2} m_{t-1}) \quad (1.28)$$

où  $\Delta m_t = (m_t - m_{t-1})$ . Cette équation montre qu'en cas de choc monétaire unique, la durée de l'écart de l'inflation par rapport à son état stationnaire n'est que de deux périodes. De manière plus générale, lorsque les prix sont prédéterminés, la durée de l'impact d'un choc de demande agrégée sur le produit et le niveau des prix n'excède pas la durée des contrats. La faible capacité de cette spécification à reproduire la persistance de l'inflation et du produit a conduit à son abandon progressif.

### 3.2 Prix prédéterminés pour une durée aléatoire (Mankiw et Reis, 2002)

Mankiw & Reis (2002) utilisent une prédétermination des prix à la Fischer<sup>3</sup> avec une révision aléatoire des contrats de prix à la Calvo. La durée moyenne des contrats reste de deux périodes, mais les durées individuelles varient, certaines étant assez longues pour engendrer une forte persistance des chocs monétaires. À chaque période, une firme a une probabilité  $\lambda$  de pouvoir modifier entièrement sa trajectoire optimale de prix  $\{x_{t,t+j}\}$ ,  $j \in [0; +\infty[$ , de manière à minimiser la fonction de perte suivante :

$$L_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (x_{t,t+j} - p_{t+j}^*)^2$$

La séquence de prix optimale pour la firme  $i$  prend alors la forme suivante :

$$x_{t,t+j} = E_t p_{t+j}^* \quad (1.29)$$

Les agents étant tous identiques, ceux ayant modifié pour la dernière fois leur trajectoire de prix à une même date ont fixé les mêmes prix. Le niveau général des prix

---

<sup>3</sup>Mankiw et Reis développent l'idée de rigidités dans l'acquisition d'information et l'opposent à l'existence de contrats de prix à long terme, mais formellement cette hypothèse est identique à celle de prix prédéterminés.



est alors donné par :

$$p_t = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda)^j x_{t-j,t} \quad (1.30)$$

Compte tenu des équations (1.11) et (1.29), on obtient la courbe de Phillips suivante :

$$\pi_t = \kappa y_t + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda)^j E_{t-1-j} (\pi_t + \phi \Delta y_t) \quad (1.31)$$

où  $\kappa = (\lambda\phi) / (1 - \lambda)$  et  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ . L'inflation courante dépend de l'output gap ainsi que des anticipations passées sur l'inflation et le taux de croissance du produit.

On retrouve un élément présent dans le modèle de Taylor relatif aux imperfections d'informations.

## 4 L'impact d'une politique de désinflation

Nous allons soumettre les modèles à un exercice de politique monétaire simple dans lequel la trajectoire de la masse monétaire est exogène et non stationnaire. Nous supposons que le taux de croissance annuel de la masse monétaire ( $\Delta m$ ) est exogène et fixé de manière à atteindre une cible d'inflation  $\pi^*$  (*i.e.* chaque année  $\Delta m = \pi^*$ ). La cible d'inflation  $\pi^*$  est initialement égale à 5% par an. À la date  $t = 11$ , la cible est fixée de manière discrétionnaire à 0%. Cette politique de désinflation est permanente et crédible, mais n'est pas annoncée à l'avance et n'est donc pas anticipée par les agents. La trajectoire de  $m_t$  est donc la suivante :  $m_t = m_{t-1} + \Delta m_t$ . Pour  $t \in [0, 10]$ ,  $\Delta m_t = 0.025$ , pour  $t \in [11, +\infty]$ ,  $\Delta m_t = 0$ .  $\lambda$  est fixé à 0.5, les prix étant ajustés en moyenne chaque année.  $\phi$  est fixé à 0.1 (Taylor (1999), Mankiw et Reis (2002)). Nous calculons la réponse de l'inflation [figure (1.1)] et de la production [figure (1.2)] dans chaque modèle, afin de voir s'ils reproduisent correctement la réponse graduelle et retardée de l'inflation ainsi que la perte de production liée à la réduction du taux de croissance de  $m$ .

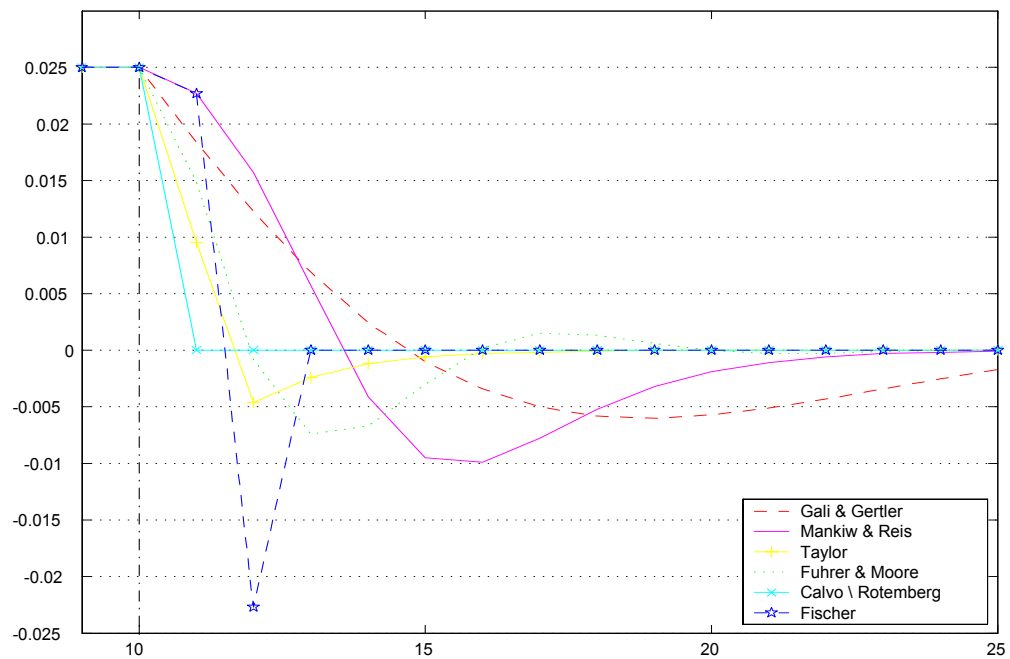


Figure (1.1) : La réponse de l'inflation

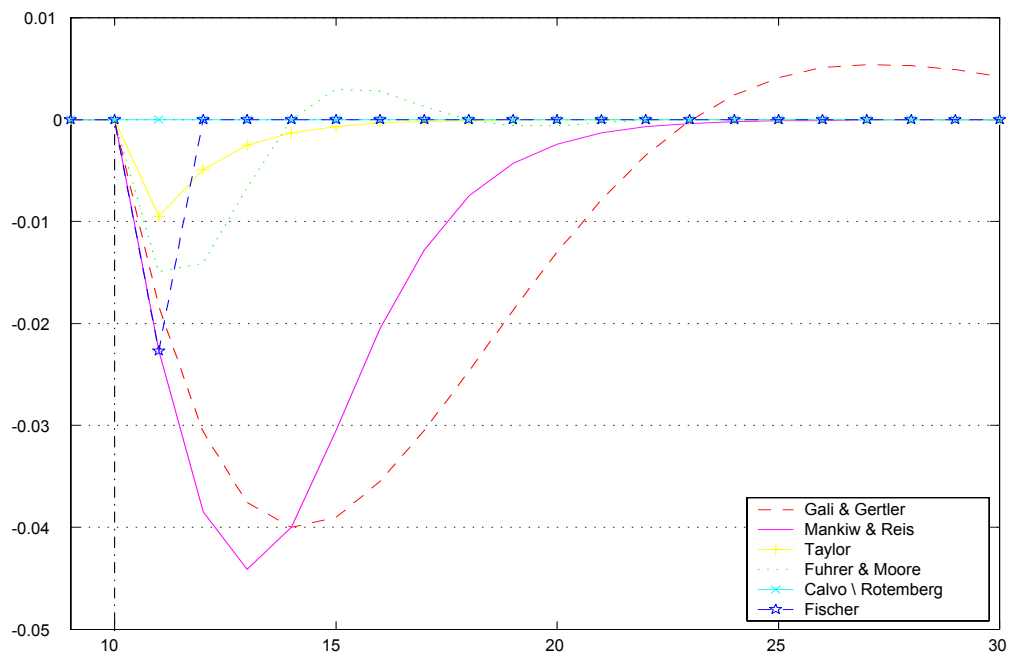


Figure (1.2) : La réponse de la production

On constate que le modèle de Calvo ne génère aucune persistance de l'inflation et prévoit que l'impact de la désinflation sur le produit sera nul. Il reflète très mal les faits stylisés. La raison est liée au comportement purement prospectif des agents, sans qu'aucune friction ne vienne perturber l'ajustement immédiat du taux d'inflation. Le taux d'inflation, qui résulte des changements de prix effectués par les firmes ajustant leurs contrats, saute immédiatement sur sa nouvelle valeur d'équilibre. Le niveau des prix est rigide mais le taux d'inflation ne l'est pas.

Le modèle de Taylor est davantage conforme aux faits. Il prédit une récession et l'ajustement du taux d'inflation vers sa nouvelle valeur d'équilibre n'est pas immédiat. Toutefois, la persistance de l'inflation suite au choc est très faible, la désinflation ayant atteint son niveau maximal au bout de deux périodes. On montre donc que contrairement à ce qui est fréquemment mis en avant dans la littérature [voir Roberts (1995) et Walsh (1998)], les propriétés dynamiques des modèles de Taylor et de Calvo sont différentes.

Malgré l'objectif affiché de reproduire une persistance plus importante que celle du modèle de Taylor, le modèle de Fuhrer et Moore ne permet pas d'engendrer une réponse plus retardée et graduelle de l'inflation. Comme chez Taylor, l'inflation est en dessous de son nouveau niveau d'équilibre au bout seulement de 2 périodes, alors que Bernanke & Gertler (1995) suggèrent une réponse très faible de l'inflation lors de la première année<sup>4</sup>. En terme de coût de production, les prédictions du modèle de Fuhrer et Moore sont également très proches de celles du modèle de Taylor [voir le graphique (1.2)].

Le modèle de Galí et Gertler engendre une dynamique beaucoup plus satis-

---

<sup>4</sup>Rotemberg et Woodford (1997) trouvent toutefois une réponse beaucoup plus rapide de l'inflation.

faisante. La réponse de l'inflation est graduelle, produisant un impact maximal au bout de 9 périodes. Contrairement à la remarque non démontrée de Ball, Mankiw & Reis (2003), ce modèle ne génère pas un saut immédiat de l'inflation similaire à celui du modèle de Calvo. Même si ce modèle est souvent assimilé à celui de Fuhrer et Moore, les chocs se transmettent beaucoup moins vite dans la spécification de Galí et Gertler [voir l'Annexe II]. Un choc sur la variable exogène  $m$  a un impact plus grand chez Fuhrer et Moore. Les prix passés ont un moindre effet de rappel. Le degré de persistance suite à un choc sur  $m$  y est donc moindre. Ces écarts dans le degré de persistance ont tendance à s'accroître avec la valeur numérique prise par  $\phi$ .

Si la prédétermination des prix pour deux périodes engendre une dynamique très peu intéressante, l'introduction par Mankiw et Reis d'un mécanisme de révision aléatoire des contrats crée la persistance souhaitée, en reproduisant notamment une réaction initiale de l'inflation très limitée. Cette réaction est engendrée en gardant la même durée moyenne des contrats que dans le modèle où les prix sont prédéterminés pour deux périodes. La présence de la structure d'acquisition aléatoire de l'information à la Calvo introduit un important délai de réactualisation des informations chez un petit nombre de firmes. Les prix de ces firmes sont fixés sur la base d'anticipations anciennes sur l'évolution de la masse monétaire. L'existence de rigidités réelles empêche les autres firmes d'ajuster leurs prix au niveau qu'elles souhaitent et les contraint à se "*coller*" en partie à l'évolution des prix dont les contrats n'ont pas pris en considération la désinflation. Ainsi, le modèle peut reproduire une forte persistance même en présence de contrats assez courts. L'impact maximal de la désinflation a eu lieu au bout de 6 périodes. À titre d'illustration, la désinflation initiée par Paul Volcker au second semestre 1979 a atteint son impact maximal au cours

de l'année 1982, soit approximativement 5 à 6 semestres après l'impulsion initiale.

## Conclusion

Même si les différents modèles néo-keynésiens semblent proches, le type de rigidité nominale choisi n'est pas neutre, à la fois du point de vue quantitatif et qualitatif. La dynamique de l'inflation issue du modèle de Calvo est très souvent utilisée mais cette forme reflète mal la dynamique de l'inflation. Les récentes critiques portant sur ce modèle y ont abusivement associé le modèle de Taylor, alors que ce dernier engendre une dynamique de l'inflation relativement différente. La littérature s'est alors focalisée sur l'intégration d'éléments retardés comme facteur permettant de créer un degré de persistance important. Or il semble que la présence de retards ne suffise pas à elle seule à créer une forte persistance. La structure sous-jacente de fixité des prix semble également jouer un rôle important. Parmi les différentes structures à prix fixes étudiées, le modèle de Galí et Gertler est celui qui reproduit le mieux les faits stylisés, mais le degré de persistance y est très dépendant de la proportion d'agents utilisant une règle de fixation des prix tournée vers le passé. Ce paramètre n'est pas un paramètre fondamental et n'est a priori pas invariant aux changements de régime monétaire. De plus, l'évaluation empirique du poids accordé à l'inflation passée dans l'équation (1.24) ne fait pas l'objet d'un consensus. Les estimations de ce poids sur données américaines varient largement entre 0.2 à 0.8 [voir Galí & Gertler (1999) et Roberts (2001)]. Il est donc difficile d'obtenir dans ce modèle une évaluation claire du degré de persistance, bien que pour des valeurs plausibles des paramètres, nous montrons que les réponses de l'inflation et du produit peuvent être satisfaisantes.

L'utilisation de prix prédéterminés avec révision aléatoire des trajectoires de prix

semble également en mesure de reproduire correctement la persistance de l'inflation. Il existe cependant un certain nombre d'éléments tendant à favoriser l'utilisation de prix fixes plutôt que des prix prédéterminés à la Mankiw-Reis. En effet, depuis vingt ans, une quantité considérable de travaux théoriques et empiriques ont mis en avant la pertinence de cette hypothèse [voir Taylor (1999)]. Mankiw (2001) lui-même note que l'hypothèse de prix fixes bénéficie d'un fort support théorique et empirique. Ball, Mankiw et Romer (1988) montrent qu'empiriquement, les firmes modifient plus souvent leurs prix lorsque l'inflation moyenne augmente. Ce résultat est compatible avec l'existence de prix fixes et non avec celle de prix prédéterminés. Si les prix sont fixes, les firmes veulent garder le moins longtemps possible leur prix constant lorsque l'inflation est élevée. Ainsi, la durée moyenne des contrats est moindre. Si les prix sont prédéterminés, le niveau moyen d'inflation n'a aucune incidence sur les choix des firmes car, les prix étant supposés parfaitement flexibles, les firmes peuvent intégrer toute inflation prévisible, quel que soit son niveau.

## 5 Annexes

### 5.1 Annexe I : Dérivation du prix optimal de la firme i

Le prix optimal fixé par l'agent peut se déterminer en passant par trois étapes intermédiaires :

1) Étant donné sa dépense totale de consommation, on détermine la demande de l'individu  $i$  pour chaque bien  $j$ .

2) Détermination du partage du revenu global de l'individu  $i$  entre consommation globale et encaisses monétaires réelles globales.

3) Compte tenu de la demande adressée à son bien, l'individu  $i$  fixe le prix de son bien.

#### 5.1.1 Étape 1 : Détermination de la demande de bien de l'individu i

Étant donné une dépense nominale totale  $S_i$  pour l'individu  $i$ , le programme de l'agent consiste donc à choisir le montant de dépense alloué à chacun des biens  $j$ .

$$Max_{C_{ij}} \left[ \int_0^1 P_j^{1-\sigma} dj \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (1.32)$$

$$s.c. \int_0^1 P_j C_{ij} dj = S_i \quad (1.33)$$

La résolution de ce programme nous permet d'aboutir à la condition suivante :

$$C_{ij} = \left( \frac{P_j}{P_k} \right)^{-\sigma} C_{ik} \quad (1.34)$$

On a par définition :

$$\int_0^1 P_j C_{ij} dj = PC_i \quad (1.35)$$

En ce servant de l'équation (1.34), l'écriture précédente peut se réécrire comme suit :

$$PC_i = P_j^\sigma C_{ij} \int_0^1 P_j^{1-\sigma} dj \quad (1.36)$$

Ètant donné la définition de  $P$ , on peut réécrire l'écriture précédente de la manière suivante :

$$C_{ij} = \left( \frac{P_j}{P} \right)^{-\sigma} C_i \quad (1.37)$$

### 5.1.2 Étape 2 : Répartition du revenu entre consommation globale et encaisses réelles globales

L'individu  $i$  choisit sa consommation et ses encaisses réelles en maximisant sa fonction d'utilité.

$$\underset{C_i, M_i/P}{Max} \left( \frac{C_i}{\alpha} \right)^\alpha \left( \frac{M_i/P}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} - \frac{L_i^\beta}{\beta} \quad (1.38)$$

$$s.c. \quad PC_i + M_i = P_i Y_i + \bar{M}_i \quad (1.39)$$

La contrainte peut se réécrire de la façon suivante :

$$C_i + \frac{M_i}{P} = \frac{P_i Y_i}{P} + \frac{\bar{M}_i}{P} \quad (1.40)$$

La résolution du programme donne les conditions suivantes :

$$\frac{M_i}{P} = \frac{\alpha}{1-\alpha} C_i = (1-\alpha) \left( \frac{P_i Y_i}{P} + \frac{\bar{M}_i}{P} \right) \quad (1.41)$$

$$C_i = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M_i}{P} = \alpha \left( \frac{P_i Y_i}{P} + \frac{\bar{M}_i}{P} \right) \quad (1.42)$$

Le revenu global est réparti entre la consommation et les encaisses en fonction du paramètre  $\alpha$  de la fonction d'utilité.

On utilise ensuite ces valeurs dans la fonction d'utilité afin d'obtenir la fonction d'utilité indirecte suivante :

$$U_i = \frac{P_i Y_i}{P} + \frac{\bar{M}_i}{P} - \frac{L_i^\beta}{\beta} \quad (1.43)$$



### 5.1.3 Étape 3 : Détermination du prix du bien $i$

L'individu  $i$  maximise la fonction d'utilité indirecte (1.43) en choisissant  $P_i$  et  $Y_i$ .

$$\text{Max}_{P_i, Y_i} \frac{P_i}{P} Y_i + \frac{\bar{M}_i}{P} - \frac{L_i^\beta}{\beta} \quad (1.44)$$

En se servant des équations (1.37) et (1.41), on peut réécrire  $C_{ji}$  comme :

$$C_{ji} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{M_j}{P} \left( \frac{P_i}{P} \right)^{-\sigma} \quad (1.45)$$

La demande du bien  $i$  est par définition la suivante  $\int_0^1 C_{ji} dj$ . On peut donc poser :

$$Y_i = \int_0^1 C_{ji} dj = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\int_0^1 M_j dj}{P} \left( \frac{P_i}{P} \right)^{-\sigma} \quad (1.46)$$

À l'équilibre, les encaisses monétaires totales des agents seront égales à l'offre nominale de monnaie. On a donc  $\int_0^1 M_j dj = \bar{M}$ . On peut donc réécrire le programme de maximisation de l'agent  $i$  comme :

$$\text{Max}_{P_i, Y_i} \frac{P_i}{P} Y_i + \frac{\bar{M}_i}{P} - \frac{L_i^\beta}{\beta} \quad (1.47)$$

$$\text{s.c. } Y_i = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\bar{M}}{P} \left( \frac{P_i}{P} \right)^{-\sigma} \quad (1.48)$$

Le résultat de ce programme d'optimisation donne la condition suivante :

$$\frac{P_i^*}{P} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} Y_i^{\beta-1} \quad (1.49)$$

ou encore :

$$\frac{P_i^*}{P} = \left[ \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\bar{M}}{P} \right)^{\beta-1} \right]^{[1/(1+\sigma(\beta-1))]} \quad (1.50)$$

Il est possible de réécrire cette dernière écriture de la manière suivante :

$$P_i^* = \Lambda P^{1-\phi} \bar{M}^\phi \quad (1.51)$$

où  $\Lambda$  est une constante et  $\phi = (\beta - 1) / [1 + \sigma (\beta - 1)]$ . On passe ensuite cette écriture en log, ce qui nous donne (en omettant la constante) :

$$p_i^* = (1 - \phi) p + \phi m \quad (1.52)$$

La demande globale, exprimée en logarithmes, prend la forme suivante :

$$y = m - p \quad (1.53)$$

On peut donc écrire de manière alternative le prix optimal pratiqué par la firme  $i$  comme :

$$p_i^* = p + \phi y \quad (1.54)$$

## 5.2 Annexe II : Dynamique des différents modèles

### 5.2.1 Dynamique du modèle de Taylor

À partir des équations (1.12), (1.16) et (1.17), il est possible de réécrire la valeur du contrat négocié en  $t$  de la manière suivante :

$$x_t = \left( \frac{\phi}{1 + \phi} \right) (m_t + E_t m_{t+1}) + \left( \frac{1 - \phi}{2(1 + \phi)} \right) (x_{t-1} + E_t x_{t+1}) \quad (1.55)$$

On utilisera la méthode de factorisation pour résoudre le modèle sous anticipations rationnelles [voir Sargent, 1987 pour une présentation approfondie de cette technique].

On utilise les opérateurs de retard  $Lx_t = x_{t-1}$  et les opérateurs avancés  $Fx_t = x_{t+1}$ . Toutes les variables futures sont anticipées à la date  $t$ . On peut donc réécrire l'équation précédente comme suit :

$$x_t = \left( \frac{\phi}{1 + \phi} \right) (1 + F) m_t + \left( \frac{1 - \phi}{2(1 + \phi)} \right) (L + F) x_t \quad (1.56)$$

En utilisant les méthodes de factorisation présentées dans Sargent (1987), la résolution de cette équation en  $x_t$  donne deux racines  $\theta_1$  et  $\theta_2$  telles que :

$$\left(\frac{1-\phi}{2(1+\phi)}\right) - F + \left(\frac{1-\phi}{2(1+\phi)}\right) F^2 = \left(\frac{1-\phi}{2(1+\phi)}\right) (1-\theta_1 F)(1-\theta_2 F) \quad (1.57)$$

Les deux racines sont alors égales à  $\lambda_1$  et  $1/\lambda_1$  où  $\lambda_1$  est la plus petite des deux racines (inférieure à 1 en valeur absolue). On peut également écrire :

$$\left(\frac{1-\phi}{2(1+\phi)}\right) \left(\theta_1 + \frac{1}{\theta_1}\right) = 1 \quad (1.58)$$

Après quelques calculs, on a alors :

$$(1-\theta_1 F)(1-\theta_1 L)x_t = \theta_1 \left(\frac{2\theta_1 \phi}{1-\phi}\right) (1+F)m_t \quad (1.59)$$

On divise de part et d'autre par  $(1-\lambda_1 F)$ . D'autre part, on sait que :

$$\left(\frac{1}{1-\theta_1 F}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j F^j \quad (1.60)$$

Au final, après avoir enlevé les opérateurs de retard, on obtient la dynamique suivante pour les contrats :

$$x_t = \theta_1 x_{t-1} + \left(\frac{2\lambda_1 \phi}{1-\phi}\right) \left[ m_t + (1+\theta_1) \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j E_t m_{t+1+j} \right] \quad (1.61)$$

La définition du niveau des prix et de la production à la date  $t$  permettent de déterminer facilement le taux d'inflation et l'écart de production à chaque période compte tenu de la trajectoire monétaire<sup>5</sup>. Étant donné la valeur choisie  $\phi = 0.1$ , on obtient  $\theta_1 = 0.5195$ .

### 5.2.2 Dynamique du modèle de Calvo

La résolution du modèle est analogue à celle du modèle 1. En intégrant les opérateurs de retard définis dans l'annexe 2 et en réécrivant l'équation (1.15) en terme de

---

<sup>5</sup>Pour rappel, la trajectoire de  $m$  est la suivante :  $m_t = m_{t-1} + \Delta m$  pour  $t \in [1, 10]$ ,  $\Delta m = 0.025$ . A partir de la date 11 et pour toutes les périodes ultérieures,  $m_t = m_{10}$

niveau des prix, on a alors :

$$[F^2 - (2 + \varkappa)F + 1] Lp_t = -\varkappa m_t \quad (1.62)$$

La résolution de cette équation quadratique nous permet à nouveau de pouvoir écrire les deux racines comme égales à  $\theta_1$  et  $1/\theta_1$  où  $\theta_1$  est la racine stable du polynôme ( $|\theta_1| < 1$ ). Par identification des coefficients, on a ensuite :

$$\varkappa = \frac{(1 - \theta_1)^2}{\theta_1} \quad (1.63)$$

La factorisation nous permet ensuite d'obtenir :

$$(1 - \theta_1 L) \left(1 - \frac{1}{\theta_1} L\right) p_t = -\frac{(1 - \theta_1)^2}{\theta_1} m_t \quad (1.64)$$

$$\Leftrightarrow (F - \theta_1) \left(F - \frac{1}{\theta_1}\right) Lp_t = -\frac{(1 - \theta_1)^2}{\theta_1} m_t \quad (1.65)$$

$$(F - \theta_1) Lp_t = \frac{(1 - \theta_1)^2}{(1 - \theta_1 F)} m_t \quad (1.66)$$

Étant donné (1.60) et après avoir enlevé les opérateurs de retard, on obtient alors :

$$p_t = \theta_1 p_{t-1} + (1 - \theta_1)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j E_t m_{t+j} \quad (1.67)$$

Compte tenu des valeurs choisies pour  $\phi = 0.1$  et  $\lambda = 0.5$ , on obtient  $\theta_1 = 0.91295$ .

### 5.2.3 Dynamique du modèle de Galí et Gertler

Nous exprimons la dynamique du niveau des prix en fonction de ses valeurs passées et des anticipations relatives au processus monétaire exogène. Cette équation est résolue en appliquant la méthode des opérateurs de retard (Sargent (1987)). Nous

utilisons l'opérateur de retard  $L$  défini par  $LE_t p_t = E_t p_{t-1}$  et l'opérateur avancé  $F$  défini par  $FE_t p_t = L^{-1}E_t p_t = E_t p_{t+1}$ . Nous réécrivons alors (1.24) de la manière suivante :

$$L^2 p_t^* [F^3 - A_1 F^2 + A_2 F - A_3] = -\frac{\beta}{\gamma_f} m_t^*, \quad (1.68)$$

où  $A_1 = (1 + \gamma_f + \beta)/\gamma_f$ ,  $A_2 = (1 + \gamma_b)/\gamma_f$  et  $A_3 = \gamma_b/\gamma_f$ . L'indice \* indique une valeur anticipée à la date  $t$ . Le polynôme (1.68) possède trois racines positives  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , avec  $\theta_3 \succ 1$ . Les termes en  $F$  peuvent être factorisés comme  $(F - \theta_1)(F - \theta_2)(F - \theta_3)$ . Les valeurs des paramètres sont déterminés en identifiant les coefficients :  $\sum_{i=1}^3 \theta_i = A_1$ ,  $\theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3 = A_2$ ,  $\prod_{i=1}^3 \theta_i = A_3$ .  $\theta_3$  est une valeur propre réelle et  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  sont des valeurs propres complexes. En utilisant la forme factorisée, (1.68) peut se réécrire comme :

$$L^2 p_t^* (F - \theta_1)(F - \theta_2) = \frac{\beta}{\gamma_f \theta_3} \frac{m_t^*}{\left[1 - \left(\frac{1}{\theta_3}\right) F\right]}.$$

Étant donné que  $\theta_3 \succ 1$ , et que  $p_{t-1}$  et  $p_{t-2}$  appartiennent à l'ensemble d'information disponible en  $t$ , nous obtenons la dynamique suivante pour le niveau des prix :

$$p_t = (\theta_1 + \theta_2) p_{t-1} - \theta_1 \theta_2 p_{t-2} + \frac{\chi}{\theta_3 \gamma_f} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta_3}\right)^j E_t m_{t+j} \quad (1.69)$$

#### 5.2.4 Comparaison des modèles de Fuhrer/Moore et de Galí /Gertler

Si la moitié des agents utilisent une règle tournée vers le passé, la dynamique de l'inflation chez Galí et Gertler est :

$$\pi_t = (1/2) \pi_{t-1} + (1/2) E_t \pi_{t+1} + (\phi/8) y_t$$

Chez Fuhrer et Moore, la dynamique est donnée par :

$$\pi_t = (1/3) (\pi_{t-1} + E_{t-1} \pi_t + E_t \pi_{t+1}) + (2\phi/3) (y_{t-1} + E_{t-1} y_t + y_t + E_t y_{t+1})$$

La différence entre les deux modèles est notable en ce qui concerne l'impact des écarts de production. Une déviation du niveau d'équilibre de  $y$  suite à un choc monétaire générera un impact beaucoup plus important chez Fuhrer et Moore que chez Galí et Gertler. Cela se vérifie en déterminant les valeurs propres des modèles [voir Perea (1998)]. En partant de (1.25), la résolution de la dynamique du modèle de Fuhrer et Moore est analogue à celle de Galí et Gertler présentée dans l'annexe précédent. En supposant  $\phi = 0.1$ , les valeurs propres de chaque modèle sont les suivantes :

Modèle	Valeur propre	Module	Partie réelle	Partie imaginaire
Fuhrer & Moore	$\theta_1, \theta_2$	0.615	0.472	$\pm 0.394i$
	$\theta_3$	3.306	3.306	
Galí et Gertler	$\theta_1, \theta_2$	0.858	0.833	$\pm 0.205i$
	$\theta_3$	1.3587	1.3587	

Tableau (1.3) : Présentation des valeurs propres

L'évolution du niveau des prix respectivement pour le modèle de Galí /Gertler et celui de Fuhrer/Moore est la suivante :

$$p_t = 1.6663p_{t-1} - 0.7356p_{t-2} + 0.0184 \sum_{j=0}^{\infty} (0.736)^j E_t m_{t+j} \quad (1.70)$$

$$p_t = 0.9444p_{t-1} - 0.3781p_{t-2} + 0.1523 \left[ \left( \frac{m_t + m_{t-1}}{2} \right) + 0.6513 \sum_{j=0}^{\infty} (0.3025)^j (E_t m_{t+j+1} + E_t m_{t+j}) \right] \quad (1.71)$$

### 5.3 Annexe III : Dynamique du modèle de Mankiw et Reis

À partir des équations (1.31) et (1.12), on peut écrire :

$$p_t = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda)^j E_{t-j} [(1 - \phi) p_t + \phi m_t] \quad (1.72)$$

À partir de la date du changement de politique monétaire, il est possible de diviser les agents en deux catégories. La première catégorie comporte les agents ayant signé

des contrats après la date du choc. La seconde catégorie comporte les agents dont les contrats ne tiennent pas compte du changement de trajectoire monétaire. On peut donc décomposer l'équation précédente comme :

$$p_t = \lambda \sum_{j=0}^{t-11} (1-\lambda)^j E_{t-j} [(1-\phi)p_t + \phi m_t] + \lambda \sum_{j=t-10}^{\infty} (1-\lambda)^j E_{t-j} [(1-\phi)p_t + \phi m_t] \quad (1.73)$$

Le premier membre de l'équation représente les agents ayant modifié leur trajectoire de prix et le second membre représente les agents dont les contrats sont antérieurs au choc monétaire. Les agents dans le premier membre savent que  $m_i = 0.275$ , pour tout  $i \geq 11$ . Les agents dont les contrats sont dans le second membre ont fixé  $E_{t-j}p_t = E_{t-j}m_t$ . En posant  $E_{t-j}p_t = p_t$ , on a alors :

$$p_t = \lambda [(1-\phi)p_t + 0.275\phi] \sum_{j=0}^{t-11} (1-\lambda)^j + 0.025(1+t)\lambda \sum_{j=t-10}^{\infty} (1-\lambda)^j$$

Ceci donne la dynamique du niveau des prix suivante :

$$p_t = \frac{0.275\phi [1 - (1-\lambda)^{t-10}] + 0.025(1+t)(1-\lambda)^{t-10}}{1 - (1-\phi)[1 - (1-\lambda)^{t-10}]} \quad (1.74)$$

## Chapitre 2

# Impact de la Périodicité des Contrats sur la Persistance de l'Inflation

### Introduction

La courbe Néo-Keynésienne de Phillips est devenue le cadre standard pour l'analyse de la politique monétaire. Sa construction est basée sur le modèle des prix rigides dépendants du temps de Calvo (1983). L'hypothèse principale de ce modèle suppose qu'à chaque période, chacune des entreprises a une probabilité constante de changer ses prix. Les entreprises qui ne peuvent pas changer leur prix se retrouvent avec le prix de la période précédente. Cette structure aura comme conséquence la rigidité des prix agrégés. Cependant, la rigidité des prix n'implique pas la rigidité de l'inflation et ce modèle a été discuté du fait de son incapacité à reproduire les divers faits stylisés. Plus précisément, il ne capture pas correctement la persistance de l'inflation [voir Fuhrer & Moore (1995), Mankiw & Reis (2002)]. Nous considérons dans cette partie deux approches afin d'étudier la persistance dans ce cadre. La première approche, développée par Galí & Gertler (1999) sous l'hypothèse de rigidité des prix, mais suppose qu'une fraction des firmes ajustent ses prix en référence aux



prix passés, '*backward-looking*'. La dynamique de l'inflation qui résulte de la courbe hybride de Phillips comprend alors deux composantes, la première est composée d'éléments retardés, '*backward-looking*' et la deuxième est composée d'éléments anticipés, '*forward-looking*'. La deuxième approche est celle qui consiste à remplacer l'hypothèse de rigidité des prix par celle de la rigidité de l'information [voir Mankiw & Reis (2002)], de ce fait, l'information imparfaite sera un élément principal dans la dynamique de l'inflation. Les firmes mettent à jour rarement leurs informations en se basant sur les conditions macro-économiques actuelles. Le flux informationnel des firmes suit une structure probabiliste comparable au modèle de Calvo, mais chaque signal représente une mise à jour au niveau de l'information plutôt qu'un changement au niveau des prix. Le choix de ces deux modèles est motivé par le fait qu'ils représentent deux hypothèses fondamentales totalement différentes, à savoir l'hypothèse des prix rigides et l'hypothèse des informations rigides ; mais aussi en se référant au travail comparatif que nous avons mené dans le premier chapitre et qui nous a conduit à la conclusion que seuls les modèles de Galí & Gertler (1999) et celui de Mankiw & Reis (2002) semblent reproduire correctement les faits stylisés concernant la réponse de l'inflation et du produit à un choc de désinflation<sup>1</sup>. Les deux modèles introduisent de la rigidité dans la dynamique de l'inflation et tous les deux sont considérés dans la littérature comme des modèles reproduisant avec succès la dynamique de l'inflation suite à un choc de politique monétaire. Dans de tels modèles basés sur des formes réduites, les propriétés de la dynamique dépendent de deux hypothèses clés relatives à des valeurs numériques de quelques paramètres.

---

<sup>1</sup>Nous avons tenté de résumer les deux faits stylisés de la manière suivante :

- i) Suite à une modification de la politique monétaire, la réponse de l'inflation est graduelle et retardée.
- ii) Toute politique de désinflation génère une récession.

Galí & Gertler (1999) et Mankiw & Reis (2002) évaluent la probabilité que les agents remettent à jour les prix (ou les informations). Cette probabilité est traduite par le degré de rigidité qui consiste à déterminer la durée durant laquelle les contrats ne sont pas modifiés [voir Taylor (1999)]. Pour le choix de ce paramètre, une procédure fréquente dans la littérature est de considérer arbitrairement une longueur empirique, selon des études micro et macroéconomiques [voir Taylor (1999)], pour les contrats des prix et puis déterminer une probabilité d'ajustement des prix pour les firmes. Selon la base de son travail empirique, Taylor (1999) conclut que la durée moyenne des prix est approximativement d'un an, qui est une hypothèse standard dans cette littérature. Pour chaque période, la probabilité du changement des prix est directement dérivée de la longueur "physique" des contrats. Par exemple, dans le cas d'un modèle quadrimestriel, la durée des prix d'un an induit une probabilité de changement des prix de 0,25 par quadrimestre, alors que dans un modèle semestriel, il serait 0,5 par semestre. Nombreux sont les travaux effectués sur les modèles à information rigides, mais afin d'avoir des résultats comparables avec des modèles à prix rigides, nous posons une hypothèse de standardisation, selon laquelle nous supposons que comme les prix, les informations sont également mis à jour en moyenne annuellement [voir Mankiw & Reis (2002) et Trabandt (2003)]. Quelques travaux récents donnent raison et apportent un soutien à cette hypothèse [voir Carrol (2003) et Wolfers (2003)].

Dans ce chapitre, nous montrons que du fait que la probabilité de mise à jour des prix (des informations) est calibrée de cette manière, les propriétés dynamiques du modèle concernant la persistance de l'inflation sont très sensibles à la périodicité choisie pour les mises à jour du modèle. D'ailleurs, pour une longueur " physique" donnée du contrat (un an par exemple), le signe de la relation périodicité-persistance

dépend des spécifications choisies des prix rigides (ou des informations rigides). Le passage, par exemple, d'un modèle semestriel à un modèle quadrimestriel abaisse la persistance dans le modèle hybride des prix rigides de Galí & Gertler (1999) au moment où le même passage augmente la persistance dans les modèles à information rigide de Mankiw & Reis (2002). Ceci résulte directement de l'utilisation de la structure probabiliste aléatoire de mise à jour inspirée du modèle de Calvo (1983). Le fait d'avoir une probabilité 0,5 par semestre pour remettre à jour son prix (ou son information) n'a pas la même distribution des prix (ou des informations) que si la probabilité était de 0,25 par semestre seulement. Une telle différence aura nécessairement un impact considérable sur la dynamique de l'inflation.

## 1 Le cadre théorique

Nous utilisons une procédure standard consistant dans un premier temps à déterminer le prix optimal d'une firme en l'absence de rigidités, puis dans un second à spécifier les contraintes dynamiques sur l'ajustement des prix. En raison d'une concurrence imparfaite sur le marché des biens, le prix optimal d'une firme à la date  $t$  est donné par l'équation (1.11), [voir Blanchard & Fischer (1989)]. La demande agrégée est fonction positive des encaisses réelles et donnée par l'équation (1.12). Le choix d'une spécification simple permet de mieux isoler les implications des rigidités nominales choisies, enlevant toutes les autres sources possibles de dynamique. La persistance de l'inflation provient uniquement de la contrainte imposée sur l'ajustement dynamique des prix, permettant une comparaison aisée de l'impact de chaque élément.

## 1.1 Modèles à prix rigides (prix fixes)

Au cours de chaque période, chaque firme a une probabilité  $\lambda$  de pouvoir modifier son prix. Elle garde son prix inchangé avec la probabilité  $1 - \lambda$ . Il existe deux catégories de firmes dans l'économie, qui se distinguent par leur comportement lorsqu'elles sont en mesure de modifier leurs prix. Une fraction  $\omega$  des firmes utilise une règle de fixation des prix tournée vers le passé, "*backward-looking*" et une fraction  $1 - \omega$  utilise une règle tournée vers le futur "*forward-looking*". Ces dernières fixent le prix<sup>2</sup>  $p_t^f$  :

$$p_t^f = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda)^j E_t p_{t+j}^* \quad (2.1)$$

Le prix fixé en  $t$  est une moyenne pondérée des prix optimaux allant jusqu'en  $(t + i)$ , la pondération étant égale à la probabilité que le prix reste constant jusqu'à cette date. La fraction  $(1 - \omega)$  de firmes "backward" qui restent fixe le prix  $p_t^b$  :

$$p_t^b = x_{t-1} + \pi_{t-1}, \quad (2.2)$$

où  $x_t$ , l'indice des prix modifiés en  $(t - 1)$ , est donné par :

$$x_t = (1 - \omega) p_t^f + \omega p_t^b \quad (2.3)$$

Le niveau général des prix en  $t$ ,  $p_t$ , est alors donné par :

$$p_t = \lambda x_t + (1 - \lambda) p_{t-1} \quad (2.4)$$

La courbe de Phillips hybride obtenue par Galí & Gertler (1999) est :

$$\pi_t = \gamma^f E_t \pi_{t+1} + \gamma^b \pi_{t-1} + \chi y_t, \quad (2.5)$$

avec  $\gamma^f = \frac{(1 - \lambda)}{1 - \lambda + \omega}$ ,  $\gamma^b = \frac{\omega}{1 - \lambda + \omega}$  et  $\chi = \frac{\lambda^2 \phi (1 - \omega)}{1 - \lambda + \omega}$ .

---

<sup>2</sup>Le coefficient d'actualisation est égal à 1, ce qui n'a pas d'incidence sur les résultats.

## 1.2 Modèles à informations rigides (prix prédéterminés)

Mankiw & Reis (2002) utilisent le même cadre d'ajustement des contrats, mais remplacent la fixité des prix par une hypothèse de prédétermination au sens de Fischer (1977). À chaque signal de changement, une firme choisit une trajectoire entière de prix plutôt qu'un seul prix constant. Les prix sont parfaitement flexibles dans le sens où un prix différent peut être choisi pour chaque période future. Soit  $x_{t,t+i}$  le prix choisi en  $t$  pour  $t+i$ , à chaque période, une fraction  $\lambda$  des firmes détermine une trajectoire optimale de prix  $\{x_{t,t+j}\}_{j \in [0;+\infty[}$  de la manière suivante :

$$x_{t,t+j} = E_t p_{t+j}^*. \quad (2.6)$$

Le niveau des prix est une moyenne pondérée des prix en vigueur en  $t$  :

$$p_t = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1-\lambda)^j x_{t-j,t}. \quad (2.7)$$

La courbe de Phillips de Mankiw & Reis (2002) est :

$$\pi_t = \kappa y_t + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1-\lambda)^j E_{t-1-j} (\pi_t + \phi \Delta y_t), \quad (2.8)$$

où  $\kappa = (\lambda\phi) / (1-\lambda)$  et  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ . La dynamique de l'inflation dépend des erreurs d'anticipation des agents.

## 2 Persistance et Périodicité

Pour calibrer le degré de rigidité nominale, il faut distinguer d'une part (a) la durée moyenne des contrats  $D$  exprimée en années ; et (b) la durée moyenne des contrats exprimée en nombre de périodes,  $N$ . Si par exemple la durée  $D$  des contrats de prix est d'un an en moyenne, cela ne détermine pas immédiatement la durée des contrats en termes de périodes ( $N$ ), qui varie selon la périodicité choisie ( $N$  est égal à 4 dans un modèle trimestriel, à 2 dans un modèle semestriel, etc..).

La durée des contrats  $D$  est une variable empirique. Il existe un fort soutien empirique en faveur d'une durée  $D = 1$  [nous adopterons cette hypothèse<sup>3</sup>, voir Taylor (1999)]. Par contre, il n'existe pas de raison pour favoriser une valeur particulière de  $N$ . Le choix de la périodicité est souvent effectué uniquement en fonction des données disponibles, ce qui revient souvent à considérer le cas trimestriel et donc  $\lambda = 0.25$ . D'autres périodicités sont néanmoins utilisées [Par exemple, Edmond (2003), Kulish (2003) ou Mankiw, Reis & Wolfers (2003) utilisent un modèle mensuel] et Woodford (2003) note que la longueur naturelle d'une période dans un modèle monétaire en temps discret doit correspondre à la durée du cycle de décision de la banque centrale, soit 8 périodes par an aux États-Unis et 12 dans la zone Euro. Pour une valeur  $D$  donnée, les choix possibles pour  $N$  sont donc variables et la théorie sous-jacente ne plaide pas pour l'utilisation systématique d'un cadre trimestriel.

Pour  $D$  donné, la liberté de calibration du paramètre  $N$  requiert une insensibilité des propriétés dynamiques du modèle aux variations de la périodicité. Ce n'est pas le cas. Dans un cadre à la Calvo, la périodicité choisie modifie la distribution de la longueur des contrats de prix. Avoir une possibilité de 0.5 de changer son prix chaque semestre ou une probabilité de 0.25 chaque trimestre implique dans les deux cas une modification annuelle des prix en moyenne, mais une répartition de la durée individuelle des contrats différente. Ceci est illustré dans le Tableau (2.1), qui reflète en fonction de  $N$  la fraction des firmes qui n'actualisent pas leur prix (ou leur trajectoire de prix) durant 1, 2, 3 ou 5 ans<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Notre analyse est comparative, le choix de la valeur  $D$  n'a donc pas d'implication sur les résultats obtenus tant que cette valeur est fixe lors des comparaisons.

<sup>4</sup>La probabilité  $\lambda$  d'ajuster son prix à chaque période est égale à  $1/N$ . La fraction de firmes n'ajustant pas leur prix durant  $j$  périodes est égale à  $\left(\frac{N-1}{N}\right)^j$ . La probabilité de ne pas ajuster son prix pendant un an, pour  $D = 1$ , est égale à  $\left(\frac{N-1}{N}\right)^N$ .

$\lambda (1/N)$	1 an	2 ans	3 ans	5 ans
1/2	0.25	0.063	0.016	0.001
1/3	0.296	0.078	0.026	0.002
1/4	0.316	0.1	0.032	0.003
1/6	0.335	0.112	0.038	0.004
1/12	0.352	0.124	0.044	0.005

Tableau (2.1) : Les fractions des firmes n'ajustant pas leurs contrats

Nous considérons une politique de désinflation consistant pour la banque centrale à diminuer le taux de croissance de la masse monétaire. Dans le modèle à prix prédéterminés, la fraction de firmes fixant leurs prix  $k$  années<sup>5</sup> après la mise en place de la désinflation sur la base d'une information obsolète augmente avec le paramètre  $N$ . La hausse de  $N$  implique en contrepartie que d'autres firmes modifient plus souvent leur trajectoire. Au final, une augmentation de  $N$  accroît la persistance car (a) moins de firmes intègrent dans leurs contrats la modification de la politique monétaire menée; et (b) l'ajustement plus fréquent des trajectoires de prix par le reste des firmes n'a pas d'impact car les prix sont flexibles. Dans un modèle de ce type, lorsqu'une firme prédit correctement la trajectoire monétaire, la fréquence des révisions de la série de prix n'a pas d'importance<sup>6</sup>. Les firmes avec une information obsolète ont un impact important, car elles continuent d'augmenter leurs prix en fonction du précédent taux de croissance de la masse monétaire. La présence de rigidités réelles amplifie cet effet en contraignant les autres firmes à ne pas diminuer trop brusquement le taux de croissance de leurs prix afin de garder un prix relatif stable.

Dans le modèle à prix fixes de Galí et Gertler, une modification de  $N$  a un effet inverse et diminue la persistance de l'inflation. Le Tableau 2 montre, en fonction de

---

<sup>5</sup> Avec ( $k > 0$ ).

<sup>6</sup> Nous considérons ici un choc unique.

$N$ , les valeurs prises par les paramètres de la courbe de Phillips hybride (2.5)<sup>7</sup> :

Périodicité	$\lambda$	$\gamma_f$	$\gamma_b$	$\chi$
Semestriel	1/2	0.5	0.5	0.0125
Quadrimestriel	1/3	0.5714	0.4286	0.0048
Trimestriel	1/4	0.6	0.4	0.0025
Bimensuel	1/6	0.625	0.375	0.001
Mensuel	1/12	0.6471	0.3529	0.0002
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 2/3$	$\rightarrow 1/3$	$\rightarrow 0$

Tableau (2.2) : Les paramètres de la courbe de Phillips hybride

Le poids  $\gamma_f$  accordé à l'inflation anticipée dans la courbe de Phillips (2.5) augmente avec  $N$  et celui accordé à l'inflation passée  $\gamma_b$  décroît, ce qui a pour effet de diminuer le degré de persistance. Le mécanisme est identique au précédent, c'est à dire lié à l'impact de  $N$  sur la probabilité pour certains contrats de rester fixes pour des périodes plus longues, mais les conséquences sont différentes. En effet, le fait que plus de prix soient gardés constants n'a pas d'impact sur le taux d'inflation, car celui-ci dépend directement des prix fixés par les firmes pouvant les modifier. En revanche, une probabilité supérieure de garder le même prix pour une longue période de temps va augmenter le poids accordé aux prix optimaux situés au delà de la première année dans l'équation (2.1). Les nouveaux prix convergent plus rapidement vers leur nouvelle valeur d'équilibre et l'inflation varie plus fortement suite à un choc, impliquant une moindre persistance. Ainsi, bien que la structure d'arrivée des possibilités d'ajustement soit la même dans les deux modèles, les implications de l'utilisation de cette structure sont très différentes.

<sup>7</sup>Pour l'ensemble des cas étudiés, nous calibrons  $\phi = 0.1$  [voir Taylor (1999)] et  $\omega = 0.5$  [voir Jondeau & Le Bihan (2001)].



### 3 L'impact du choix de la périodicité

Nous illustrons la dynamique de l'inflation impliquée par les courbes de Phillips (2.5) et (1.31) en simulant une politique de désinflation soudaine et non anticipée. Le taux de croissance annuel de la masse monétaire  $\Delta m$  est exogène et choisi afin d'atteindre la cible d'inflation annuelle  $\pi^*$ , i.e.  $\Delta m = \pi^*$  chaque année. La cible  $\pi^*$  est initialement égale à 5% par an. À la date  $t = 0$ , la banque centrale adopte une politique de stabilité des prix ( $\pi^* = 0$ ). Cette modification est permanente, crédible et non anticipée. Les prix et les trajectoires de prix sont supposées être modifiées chaque année en moyenne ( $D = 1$ ). Nous rappelons dans le graphique (2.1) les réponses de l'inflation des modèles de Mankiw & Reis et Galí et Gertler pour ( $N=2$ ) :

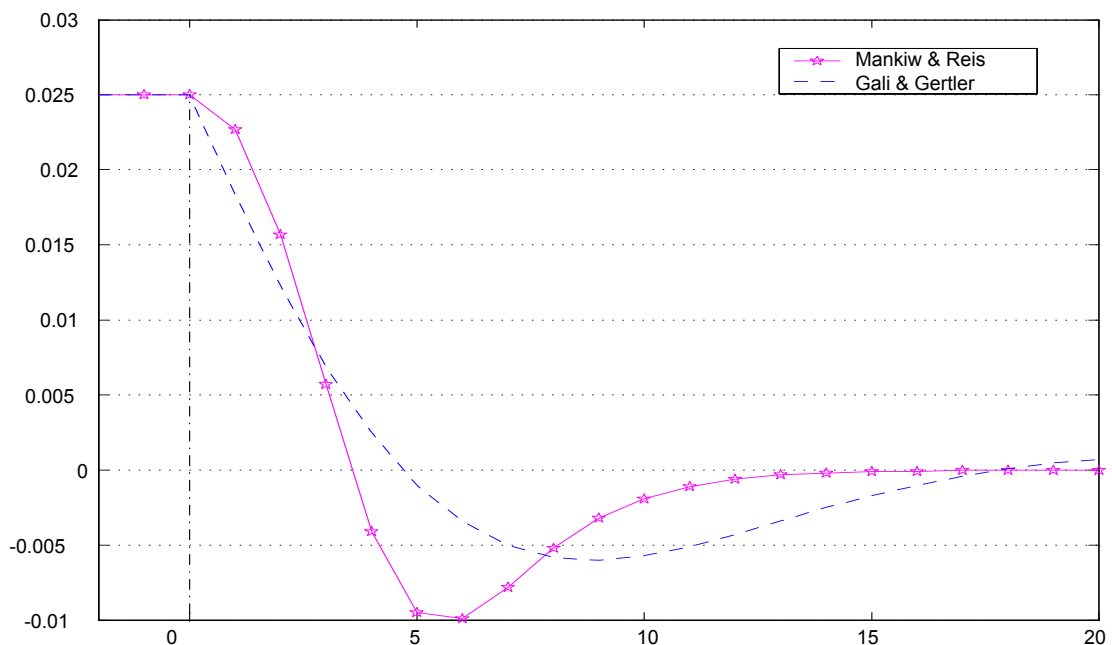


Figure (2.1) : Le modèle de Mankiw & Reis vs. celui de Galí et Gertler ( $N=2$ )

Après le choc initial, les deux modèles montrent une réponse progressive et re-

tardée de l'inflation très souhaitable pour ce genre de modèles dynamiques [voir Mankiw (2001)]. Ainsi, on peut avoir l'impression que les deux modèles reproduisent correctement quelques faits stylisés concernant la persistance de l'inflation.

Nous employons le même exemple numérique que dans le paragraphe précédent. La fréquence moyenne de la négociation des contrats des agents est toujours d'un an et  $\pi^*$  est égale à 5% avant le choc et à zéro après. Comme  $\pi^*$  est une valeur annuelle, à chaque période,  $\Delta m_t$  est égale à  $(\pi^*/N)$ . Nous comparons les dynamiques de l'inflation engendrées par les deux modèles pour  $N = 2, 3, 4, 6, 12$ . La réponse de l'inflation est présentée sur les figures (2.2) & (2.4) alors que la réponse de la production est présentée sur les figures (2.3) & (2.5). L'unité de temps sur l'axe horizontal correspond à un mois et les valeurs affichées correspondent aux taux d'inflation mensuels exprimés en rythme semestriel<sup>8</sup>.

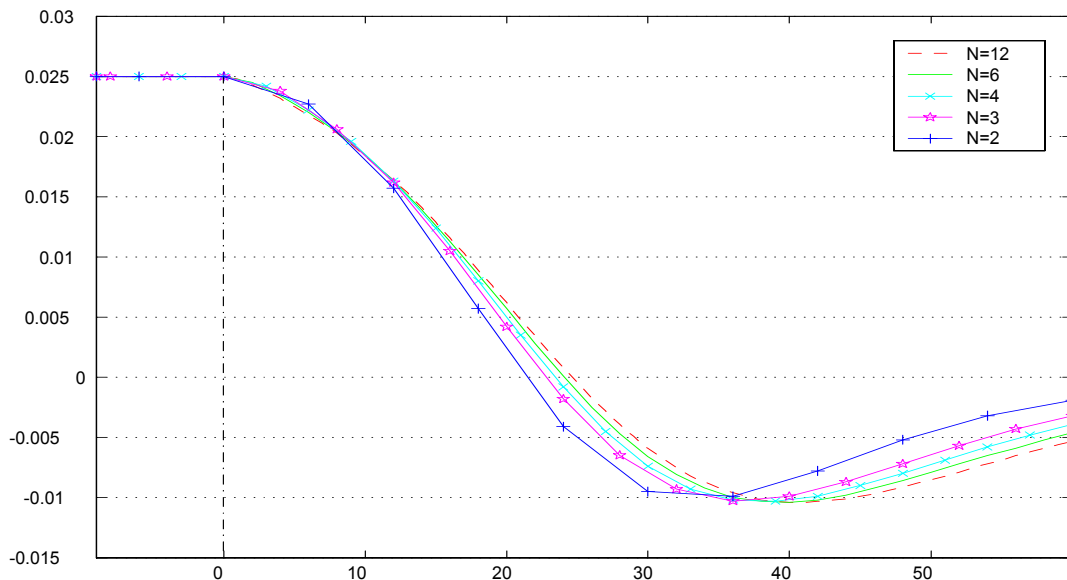


Figure (2.2) : Réponse de l'inflation sous hypothèse de rigidité de l'information

<sup>8</sup>Lorsque les taux d'inflation ont été calculés sur des intervalles de temps supérieurs à un mois, nous avons interpolé linéairement entre les deux valeurs calculées.

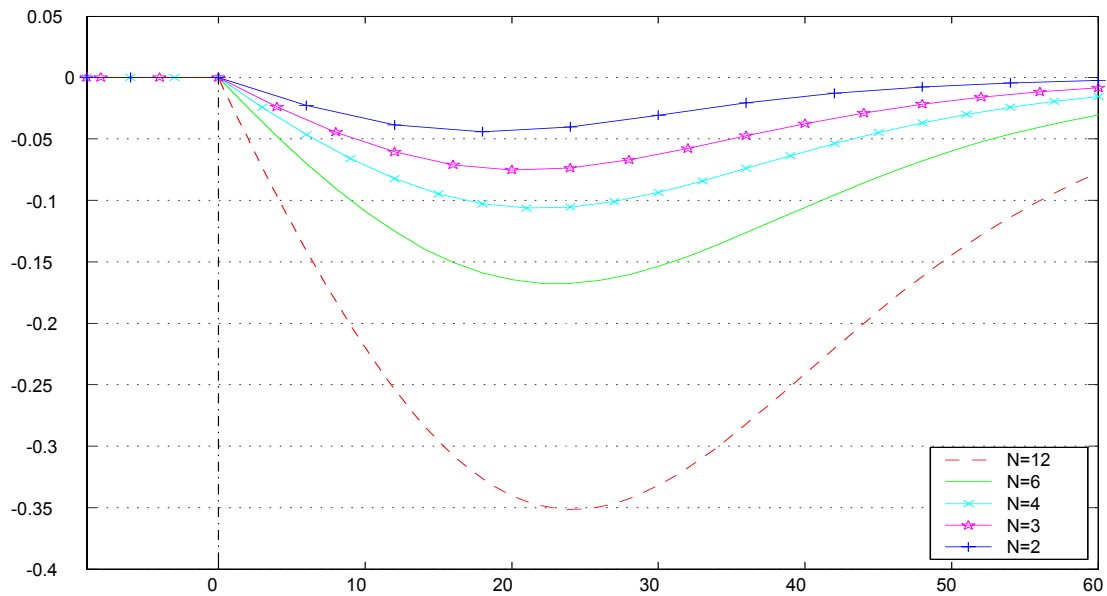


Figure (2.3) : Réponse de la production sous hypothèse de rigidité de l'information.

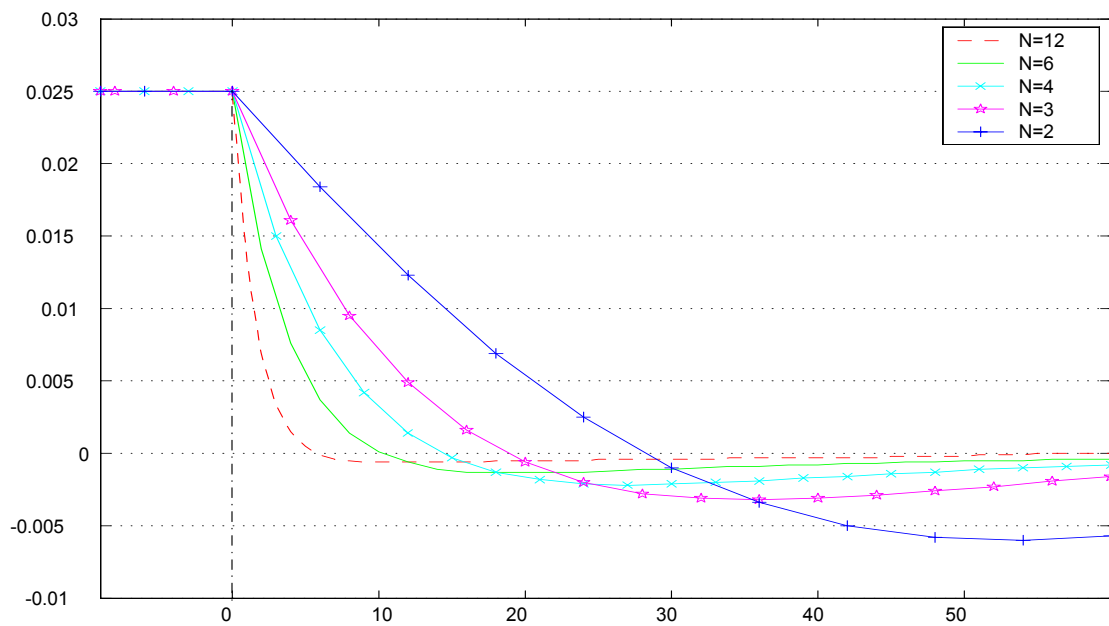


Figure (2.4) : Réponse de l'inflation sous hypothèse de rigidité des prix

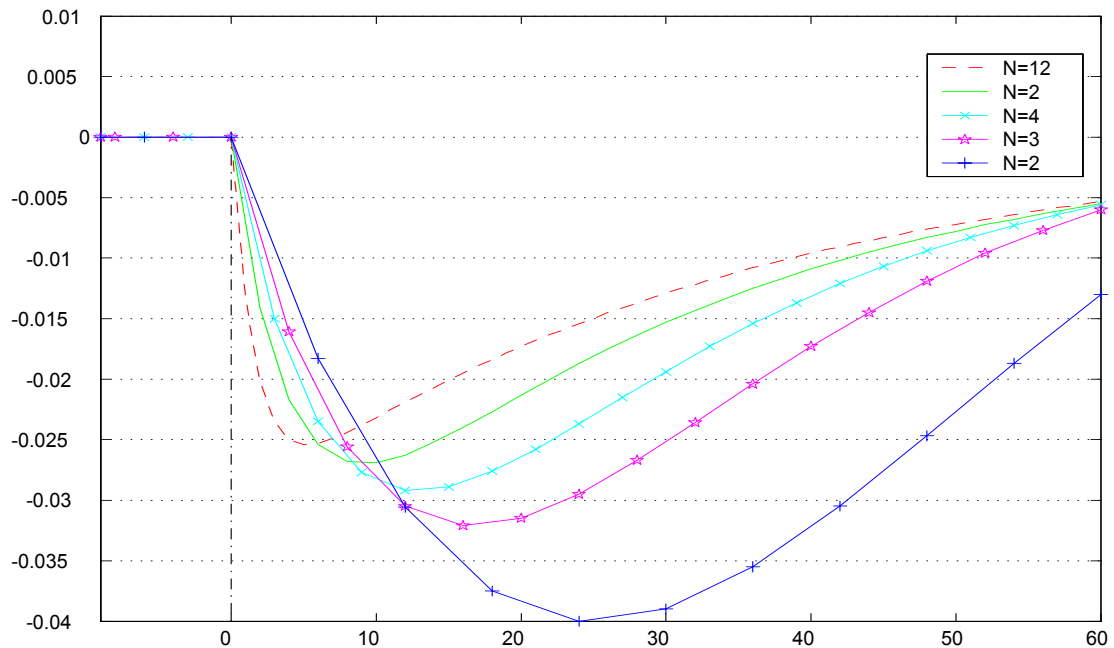
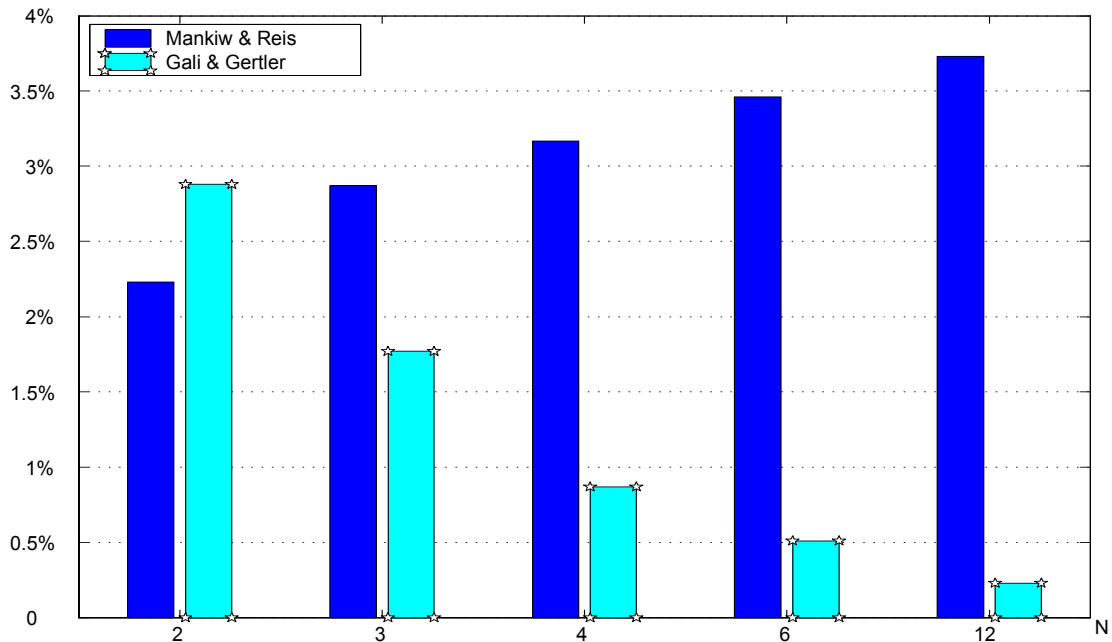


Figure (2.5) : Réponse de la production sous hypothèse de rigidité des prix.

Nous remarquons que la persistance augmente avec  $N$  dans les modèles à informations rigides [voir la figure (2.2)], alors qu'elle décroît avec  $N$  dans les modèles à prix rigides [voir la figure (2.4)]. Dans ce dernier modèle, l'inflation atteint sa nouvelle cible en moins de six mois si le modèle est mensuel, contre trente mois dans un cadre semestriel. Ces différences ont un impact important concernant les variables réelles, notamment en terme de coût réel de désinflation [voir les figures (2.3) & (2.5)]. Plus le taux d'inflation s'ajuste vite et moins le coût sera élevé. La figure (2.6) montre le ratio de sacrifice moyen sur les cinq premières années en fonction du modèle et de la périodicité.

Figure (2.6) : Le coût de la production en fonction de  $N$ 

Le degré variable de persistance peut avoir un impact non négligeable concernant la politique monétaire optimale [voir Benigno & Lopez-Salido (2002)] en considérant une comparaison entre le coût anticipé d'une désinflation et les gains issus de la stabilité des prix. Les deux modèles génèrent des coûts de production assez comparables pour une périodicité semestrielle, mais l'évolution des coûts est inversement proportionnelle à  $N$  : nous enregistrons des coûts de plus en plus importants quand  $N$  augmente pour le modèle de Mankiw & Reis, alors que le même ratio de sacrifice en terme de production paraît décroissant avec  $N$  pour le modèle de Galí et Gertler.

### 3.1 Les autocorrélations de l'inflation

Sur la figure (2.7), nous calculons les autocorrélations implicites de l'inflation dans les deux modèles<sup>9</sup> pour  $N = 2, 3, 4, 6, 12$ , pendant les cinq années qui suivent

<sup>9</sup>  $\rho(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (\pi_t - \bar{\pi})(\pi_{t+k} - \bar{\pi})}{\sum_{t=1}^N (\pi_t - \bar{\pi})^2}$  est l'autocorrélation d'ordre  $k$ .

le choc monétaire. Les valeurs de l'inflation ne sont plus mensuelles et dépendent de la périodicité du modèle (par exemple, avec  $N = 2$ , chaque période représente un semestre).

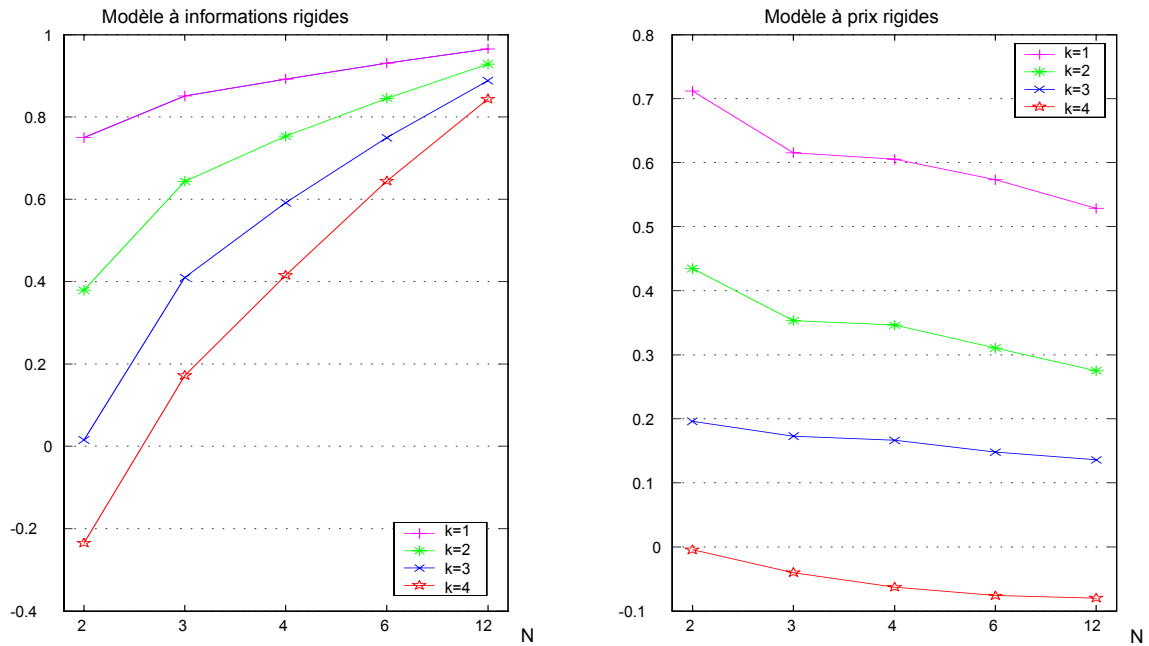


Figure (2.7) : Les autocorrélations de l'inflation dans les deux modèles en fonction de  $N$

Le degré variable de persistance peut avoir un impact concernant la politique monétaire optimale [voir Benigno & Lopez-Salido (2002)]. Dans le modèle à prix rigides, le degré de persistance de l'inflation diminue rapidement avec  $N$ . Ceci signifie qu'il y a plus de corrélation entre deux valeurs de l'inflation situées à six mois d'intervalle, ( $N = 12$ ), est supérieure à la corrélation entre deux valeurs situées à un mois d'intervalle, ( $N = 2$ ). Les propriétés du modèle à informations rigides sont plus satisfaisantes.

### 3.2 Le phénomène d'accélération

Un aspect très bien connu dans la littérature empirique est la relation positive entre la production et l'évolution de l'inflation. Mankiw et Reis (2002) montrent que le modèle à informations rigides peut reproduire correctement cette corrélation positive tandis que le modèle à prix rigides de Calvo produit une corrélation plutôt négative. Trabandt (2003) prouve que dans un cadre dynamique entièrement optimisé, un modèle hybride à prix rigides reproduit également correctement le phénomène d'accélération.

La figure (2.8) récapitule la performance relative de chaque modèle en reproduisant la corrélation du phénomène d'accélération en fonction de  $N$ . La valeur de la production,  $y_t$ , est corrélée d'abord avec une année d'évolution de l'inflation centrée par rapport à la date actuelle<sup>10</sup>, puis nous recalculons la même expression de corrélation avec les deux ans de variation de l'inflation. Les deux modèles reproduisent des valeurs positives de corrélation pour toutes les valeurs de  $N$ . Toutes les corrélations sont décroissantes avec  $N$ . Comme le processus monétaire choisi n'est pas représentatif d'un processus empirique général, nous ne nous concentrons pas sur les valeurs numériques des résultats, mais sur les performances relatives, qui dépendent de  $N$ . Pour des changements d'inflation de deux ans, quand ( $N = 12$ ), le modèle produisant la corrélation la plus élevée avec le produit est celui des prix rigides. À l'exception de ce cas et pour toutes les autres corrélations, le modèle à informations rigides dégage plus de corrélation que celui à prix rigides.

---

<sup>10</sup>Pour  $N = 4$ , il n'est pas possible d'avoir une rupture symétrique, et la corrélation calculée est :  $(y_t, \Delta\pi_{t-1}^{t+2})$ .

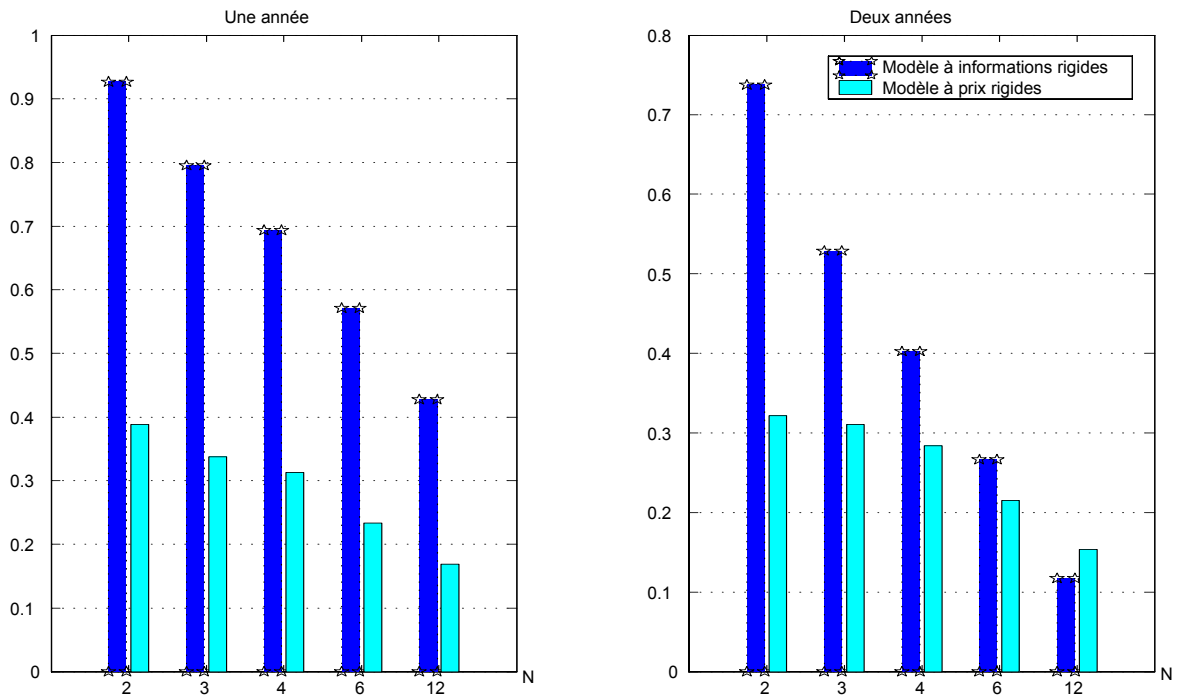


Figure (2.8) : Le phénomène d'accélération

Des modèles récents au sujet de la dynamique d'inflation sont partiellement dérivés du comportement de linéarisation. Cependant, ils ont comme objectif explicite de reproduire le comportement empirique de l'inflation. Les paramètres sont alors calibrés afin de reproduire ce comportement. Peu d'attention a été consacrée pour analyser l'impact du choix de périodicité. Tandis que la périodicité choisie est implicitement considérée comme sans importance, les exemples développés dans la deuxième partie de ce chapitre montrent que ce paramètre peut jouer un rôle important en relativisant la plausibilité des résultats déjà obtenus dans la littérature et en relançant le débat sur le bon fondement microéconomique [la critique de Lucas (1976)] des modèles à rigidité des prix ainsi que leur aspect structurel.



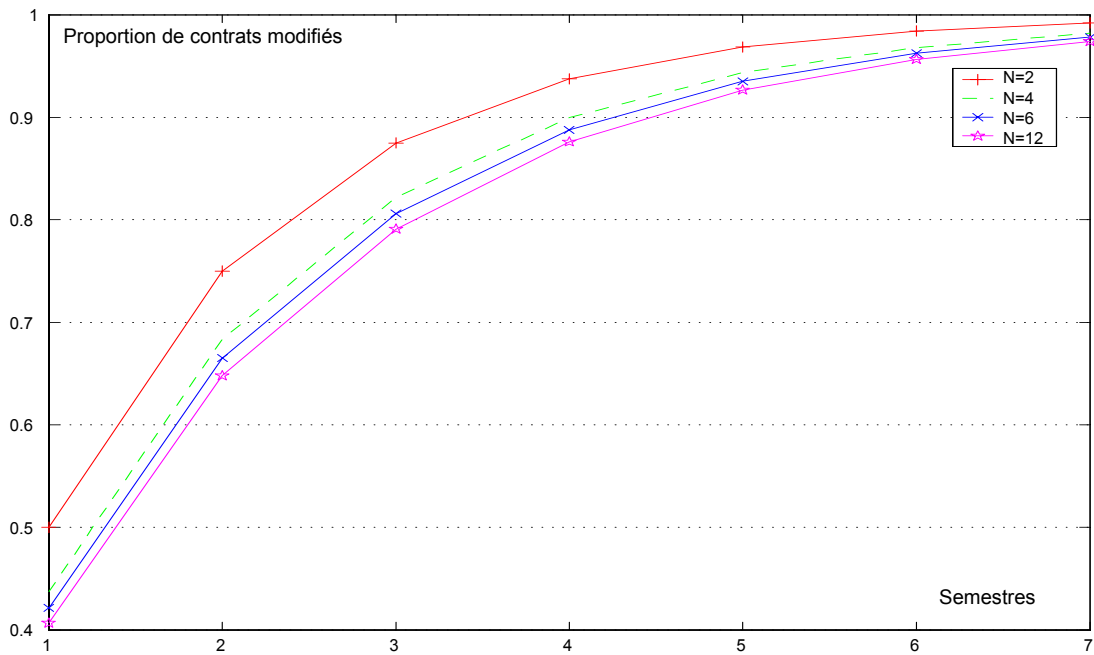


Figure (2.9) : La proportion des contrats ajustés (Type Calvo).

La graphique (2.9) montre l'évolution dans le temps de la proportion des contrats ajustés. Dans tous les cas, en moyenne les contrats s'ajustent au bout de deux semestres, mais on voit que la distribution est différente selon la périodicité choisie. Les contrats individuels ont plus de chance de s'ajuster rapidement lorsque la fréquence est moins élevée.

## Conclusion

La calibration du degré de rigidité nominale est un facteur clé de la détermination du degré de persistance de l'inflation. Cette calibration dépend directement de la durée des contrats de prix. Si l'hypothèse d'ajustement probabiliste de Calvo est utilisée, la durée des contrats n'est pas suffisante pour déterminer le degré de rigidité nominale car la périodicité choisie influe également. Implicitement, ce choix

est considéré comme sans importance. Les exemples développés ici montrent au contraire que la périodicité choisie peut influencer sensiblement les performances des modèles, d'autant plus que l'impact de la périodicité du modèle est endogène à la structure de ces derniers. Le choix d'un modèle où la périodicité n'influe pas sur la distribution des contrats, comme dans la structure de Taylor (1980), peut donc être préférable.

## 4 Annexes

Nous présentons dans ces annexes, les premiers résultats du même exercice appliqué sur deux modèles : celui de Taylor (1980) et celui de Fuhrer & Moore (1995). Cet aperçu a pour objectif de justifier la préférence du choix d'un modèle où la périodicité n'influe pas sur la distribution des contrats, comme c'est le cas dans la structure du modèle de Taylor (1980) et celui de Fuhrer & Moore (1995).

### 4.1 Annexe I : Périodicité dans le modèle de Taylor

#### 4.1.1 L'impact de la périodicité sur le modèle Taylor

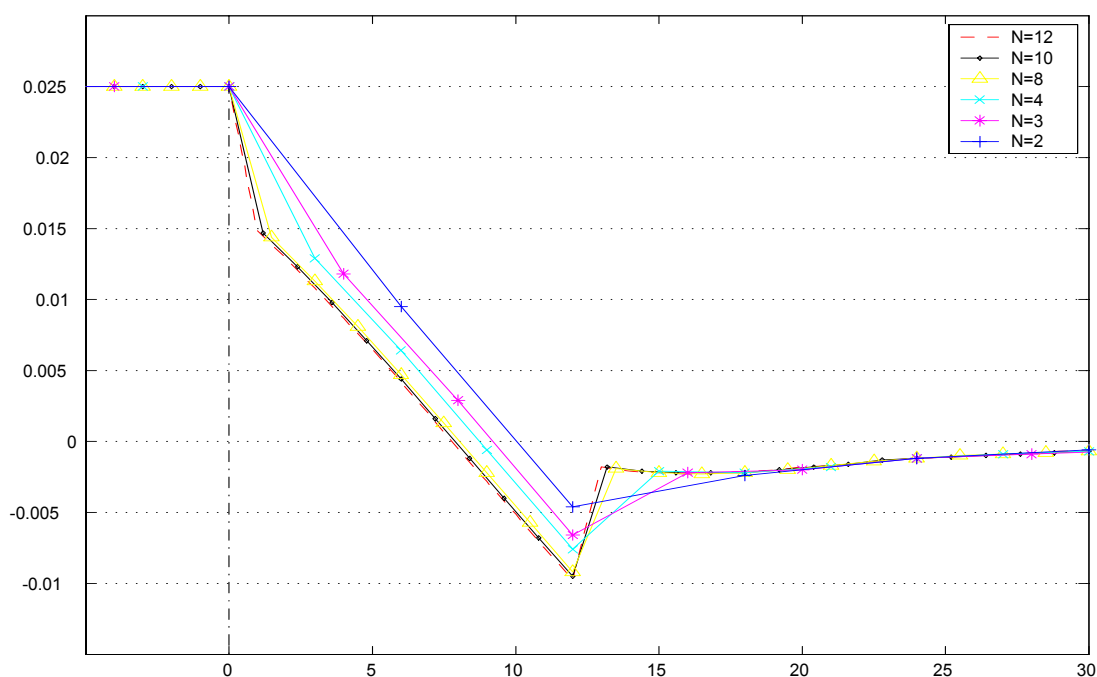


Figure (2.10) : Réponse de l'inflation selon le modèle de Taylor

Dans le modèle de Taylor [voir la figure (2.10)], la périodicité a un léger impact sur la persistance. Le fait d'augmenter la fréquence et donc le nombre de cohortes de contrats co-existant lors d'une période donnée a tendance à diminuer la persistance,

dans le sens où l'inflation atteint son nouveau niveau d'équilibre plus rapidement. Il existe toutefois un sur-ajustement du taux d'inflation, ce sur-ajustement étant plus important pour les fréquences les plus élevées (i.e. celles impliquant un ajustement initial plus rapide). Chez Taylor, l'impact maximal de la désinflation est atteint au bout d'un an, lorsque tous les contrats ont été renouvelés, et ceci quelle que soit la périodicité choisie.

#### 4.1.2 Détermination des règles de Taylor en taux de croissance

**4.1.2.1 Calcul de la forme réduite** Pour le calcul de la forme réduite, on part de :

$$\begin{aligned} y_t &= m_t - p_t \\ x_t &= \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t (p_{t+i} + \phi y_{t+i}) \\ p_t &= \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{N-1} x_{t-j} \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$x_t = \left(\frac{1-\phi}{N^2}\right) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E_t x_{t+i-j} + \left(\frac{\phi}{N}\right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t m_{t+i}$$

Et comme on peut écrire :

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E_t x_{t+i-j} = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f_i x_{t-i} + \frac{x_t}{N} + \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f_i x_{t+i}$$

avec :

$$f_i = \left(\frac{N-i}{N}\right) \frac{1}{N-1}$$

$x_t$  peut être réécrit comme suit :

$$x_t = \frac{(1-\phi)}{N-1+\phi} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{N-i}{N} \right) x_{t-i} + \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{N-i}{N} \right) E_t x_{t+i} \right] \\ + \left( \frac{\phi}{N-1+\phi} \right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t m_{t+i}$$

Le taux d'inflation s'écrit comme suit :

$$\Pi_t = p_t - p_{t-1} = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{j=0}^{N-1} (z_{t-j} - z_{t-j-1}) + \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{j=0}^{N-1} r g m_{t-j}$$

et l'output s'écrit comme suit :

$$y_t = m_t - p_t = - \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{j=0}^{N-1} z_{t-j} + m_t - \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{j=0}^{N-1} m_{t-j}$$

#### 4.1.2.2 N=2

$$x_t = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1-\phi}{1+\phi} \right) [x_{t-1} + E_t x_{t+1}] + \left( \frac{\phi}{1+\phi} \right) (m_t + E_t m_{t+1})$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que

$z_t = x_t - m_t$  et  $r g m_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$z_t = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1-\phi}{1+\phi} \right) [z_{t-1} + E_t z_{t+1}] \\ - \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1-\phi}{1+\phi} \right) r g m_t + \left( \frac{1}{2} \right) E_t r g m_{t+1}$$

et à l'équilibre  $z = (1/2) r g m$ ,

$$\Pi_t = \left( \frac{1}{2} \right) (z_t - z_{t-1} + z_{t-1} - z_{t-2}) + \left( \frac{1}{2} \right) (r g m_t + r g m_{t-1}) \\ \Pi_t = \left( \frac{1}{2} \right) (z_t - z_{t-2}) + \left( \frac{1}{2} \right) (r g m_t + r g m_{t-1})$$

et à l'équilibre  $\Pi = r g m$ ,

$$y_t = - \left( \frac{1}{2} \right) (z_t + z_{t-1}) + m_t - \left( \frac{1}{2} \right) (m_t + m_{t-1}) \\ = - \left( \frac{1}{2} \right) (z_t + z_{t-1}) + \left( \frac{1}{2} \right) r g m_t$$

Quant au produit, à l'équilibre, il s'écrit comme suit  $y = (1/2) r g m - z$

**4.1.2.3 N=3**

$$x_t = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1-\phi}{2+\phi}\right) [2x_{t-1} + x_{t-2} + 2E_t x_{t+1} + E_t x_{t+2}] \\ + \left(\frac{\phi}{2+\phi}\right) (m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2})$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que  $z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$z_t = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1-\phi}{2+\phi}\right) [2z_{t-1} + z_{t-2} + 2E_t z_{t+1} + E_t z_{t+2}] \\ + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2+\phi}\right) E_t [(1+2\phi) rgm_{t+2} + 3(1+\phi) rgm_{t+1}] \\ - \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1-\phi}{2+\phi}\right) [3rgm_t + rgm_{t-1}]$$

et à l'équilibre  $z = rgm$  et,

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{3}\right) (z_t - z_{t-3}) + \left(\frac{1}{3}\right) (rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2}) \\ y_t = -\left(\frac{1}{3}\right) (z_t + z_{t-1} + z_{t-2}) + \left(\frac{2}{3}\right) rgm_t + \left(\frac{1}{3}\right) rgm_{t-1}$$

Quant au produit, à l'équilibre, il s'écrit comme suit  $y = rgm - z$

**4.1.2.4 N=4**

$$x_t = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1-\phi}{3+\phi}\right) \left[ \begin{array}{c} 3x_{t-1} + 2x_{t-2} + x_{t-3} \\ + 3E_t x_{t+1} + 2E_t x_{t+2} + E_t x_{t+3} \end{array} \right] \\ + \left(\frac{\phi}{3+\phi}\right) (m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t m_{t+3})$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que  $z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$z_t = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1-\phi}{3+\phi}\right) \left[ \begin{array}{c} 3z_{t-1} + 2z_{t-2} + z_{t-3} \\ + 3E_t z_{t+1} + 2E_t z_{t+2} + E_t z_{t+3} \end{array} \right] \\ + \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3+\phi}\right) E_t \left[ \begin{array}{c} (1+3\phi) rgm_{t+3} + (3+5\phi) rgm_{t+2} \\ + 6(1+\phi) rgm_{t+1} \end{array} \right] \\ - \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1-\phi}{3+\phi}\right) [6rgm_t + 3rgm_{t-1} + rgm_{t-2}]$$

et à l'équilibre,  $z = (3/2)rgm$

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{4}\right) (z_t - z_{t-4}) + \left(\frac{1}{4}\right) (rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} + rgm_{t-3})$$

$$y_t = -\left(\frac{1}{4}\right) (z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + z_{t-3}) + \left(\frac{3}{4}\right) rgm_t + \left(\frac{1}{2}\right) rgm_{t-1} + \left(\frac{1}{4}\right) rgm_{t-2}$$

Aussi, à l'équilibre,  $y = (3/2)rgm - z$

#### 4.1.2.5 N=8

$$\begin{aligned} x_t = & \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1-\phi}{7+\phi}\right) \left[ \begin{array}{l} 7x_{t-1} + 6x_{t-2} + 5x_{t-3} + 4x_{t-4} \\ + 3x_{t-5} + 2x_{t-6} + x_{t-7} \end{array} \right] \\ & + \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1-\phi}{7+\phi}\right) E_t \left[ \begin{array}{l} 7x_{t+1} + 6x_{t+2} + 5x_{t+3} + 4x_{t+4} \\ + 3x_{t+5} + 2x_{t+6} + x_{t+7} \end{array} \right] \\ & + \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{\phi}{7+\phi}\right) \left( \begin{array}{l} m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t m_{t+3} \\ + E_t m_{t+4} + E_t m_{t+5} + E_t m_{t+6} + E_t m_{t+7} \end{array} \right) \end{aligned}$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que

$z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$\begin{aligned} z_t = & \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1-\phi}{7+\phi}\right) \left[ \begin{array}{l} 7z_{t-1} + 6z_{t-2} + 5z_{t-3} + 4z_{t-4} \\ + 3z_{t-5} + 2z_{t-6} + z_{t-7} \end{array} \right] \\ & + \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1-\phi}{7+\phi}\right) E_t \left[ \begin{array}{l} 7z_{t+1} + 6z_{t+2} + 5z_{t+3} + 4z_{t+4} \\ + 3z_{t+5} + 2z_{t+6} + z_{t+7} \end{array} \right] \\ & + \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1}{7+\phi}\right) \left[ \begin{array}{l} (1+7\phi) E_t rgm_{t+7} + (3+13\phi) E_t rgm_{t+6} \\ + 6(1+3\phi) E_t rgm_{t+5} + 2(5+11\phi) E_t rgm_{t+4} \\ + 5(3+5\phi) E_t rgm_{t+3} + 3(7+9\phi) E_t rgm_{t+2} \\ + 28(1+\phi) E_t rgm_{t+1} \end{array} \right] \\ & - \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1-\phi}{7+\phi}\right) \left[ \begin{array}{l} 28rgm_t + 21rgm_{t-1} + 15rgm_{t-2} \\ + 10rgm_{t-3} + 6rgm_{t-4} + 3rgm_{t-5} \\ + 2rgm_{t-6} \end{array} \right] \end{aligned}$$

et à l'équilibre,  $z = (7/2)rgm$

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{8}\right) (z_t - z_{t-8}) + \left(\frac{1}{8}\right) \left( \begin{array}{l} rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} \\ + rgm_{t-3} + rgm_{t-4} + rgm_{t-5} \\ + rgm_{t-6} + rgm_{t-7} \end{array} \right)$$

## 4.1.2.6 N=10

$$\begin{aligned}
x_t = & \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1-\phi}{9+\phi}\right) \begin{bmatrix} 9x_{t-1} + 8x_{t-2} + 7x_{t-3} \\ +6x_{t-4} + 5x_{t-5} + 4x_{t-6} \\ +3x_{t-7} + 2x_{t-8} + x_{t-9} \end{bmatrix} \\
& + \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1-\phi}{9+\phi}\right) E_t \begin{bmatrix} 9x_{t+1} + 8x_{t+2} + 7x_{t+3} \\ +6x_{t+4} + 5x_{t+5} + 4x_{t+6} \\ +3x_{t+7} + 2x_{t+8} + x_{t+9} \end{bmatrix} \\
& + \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{\phi}{9+\phi}\right) \begin{pmatrix} m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} \\ +E_t m_{t+3} + E_t m_{t+4} + E_t m_{t+5} \\ +E_t m_{t+6} + E_t m_{t+7} + E_t m_{t+8} + E_t m_{t+9} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que

$z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
z_t = & \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1-\phi}{9+\phi}\right) \begin{bmatrix} 9z_{t-1} + 8z_{t-2} + 7z_{t-3} \\ +6z_{t-4} + 5z_{t-5} + 4z_{t-6} \\ +3z_{t-7} + 2z_{t-8} + z_{t-9} \end{bmatrix} \\
& + \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1-\phi}{9+\phi}\right) E_t \begin{bmatrix} 9z_{t+1} + 8z_{t+2} + 7z_{t+3} \\ +6z_{t+4} + 5z_{t+5} + 4z_{t+6} \\ +3z_{t+7} + 2z_{t+8} + z_{t+9} \end{bmatrix} \\
& + \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1}{9+\phi}\right) \begin{bmatrix} 45(1+\phi)rgm_{t+1} + 4(9+11\phi)rgm_{t+2} \\ +14(2+3\phi)rgm_{t+3} + 3(7+13\phi)rgm_{t+4} \\ +5(3+7\phi)rgm_{t+5} + 10(1+3\phi)rgm_{t+6} \\ +6(1+4\phi)rgm_{t+7} + (3+17\phi)rgm_{t+8} \\ + (1+9\phi)rgm_{t+9} \end{bmatrix} \\
& - \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1-\phi}{9+\phi}\right) \begin{bmatrix} 45rgm_t + 36rgm_{t-1} + 28rgm_{t-2} \\ +21rgm_{t-3} + 15rgm_{t-4} + 10rgm_{t-5} \\ +6rgm_{t-6} + 3rgm_{t-7} + rgm_{t-8} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et à l'équilibre,  $z = (9/2)rgm$ ,

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{10}\right) (z_t - z_{t-10}) + \left(\frac{1}{10}\right) \begin{pmatrix} rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} \\ +rgm_{t-3} + rgm_{t-4} + rgm_{t-5} \\ +rgm_{t-6} + rgm_{t-7} + rgm_{t-8} \\ +rgm_{t-9} \end{pmatrix}$$



## 4.1.2.7 N=12

$$\begin{aligned}
x_t = & \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1-\phi}{11+\phi}\right) \left[ \begin{array}{c} 11x_{t-1} + 10x_{t-2} + 9x_{t-3} + 8x_{t-4} \\ +7x_{t-5} + 6x_{t-6} + 5x_{t-7} + 4x_{t-8} \\ +3x_{t-9} + 2x_{t-10} + x_{t-11} \end{array} \right] \\
& + \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1-\phi}{11+\phi}\right) E_t \left[ \begin{array}{c} 11x_{t+1} + 10x_{t+2} + 9x_{t+3} + 8x_{t+4} \\ +7x_{t+5} + 6x_{t+6} + 5x_{t+7} + 4x_{t+8} \\ +3x_{t+9} + 2x_{t+10} + x_{t+11} \end{array} \right] \\
& + \left(\frac{\phi}{11+\phi}\right) \left( \begin{array}{c} m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t m_{t+3} \\ + E_t m_{t+4} + E_t m_{t+5} + E_t m_{t+6} + E_t m_{t+7} \\ + E_t m_{t+8} + E_t m_{t+9} + E_t m_{t+10} + E_t m_{t+11} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que

$z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
z_t = & \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1-\phi}{11+\phi}\right) \left[ \begin{array}{c} 11z_{t-1} + 10z_{t-2} + 9z_{t-3} + 8z_{t-4} \\ +7z_{t-5} + 6z_{t-6} + 5z_{t-7} + 4z_{t-8} \\ +3z_{t-9} + 2z_{t-10} + z_{t-11} \end{array} \right] \\
& + \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1-\phi}{11+\phi}\right) E_t \left[ \begin{array}{c} 11z_{t+1} + 10z_{t+2} + 9z_{t+3} + 8z_{t+4} \\ +7z_{t+5} + 6z_{t+6} + 5z_{t+7} + 4z_{t+8} \\ +3z_{t+9} + 2z_{t+10} + z_{t+11} \end{array} \right] \\
& + \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1}{11+\phi}\right) E_t \left[ \begin{array}{c} (1+11\phi)rgm_{t+11} + 3(1+7\phi)rgm_{t+10} \\ +6(1+5\phi)rgm_{t+9} + 2(5+19\phi)rgm_{t+8} \\ +15(1+3\phi)rgm_{t+7} + 3(7+17\phi)rgm_{t+6} \\ +28(1+2\phi)rgm_{t+5} + 12(3+5\phi)rgm_{t+4} \\ +9(5+7\phi)rgm_{t+3} + 5(11+13\phi)rgm_{t+2} \\ +66(1+\phi)rgm_{t+1} \end{array} \right] \\
& - \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1-\phi}{11+\phi}\right) \left[ \begin{array}{c} 66rgm_t + 55rgm_{t-1} + 45rgm_{t-2} \\ +36rgm_{t-3} + 28rgm_{t-4} + 21rgm_{t-5} \\ +15rgm_{t-6} + 10rgm_{t-7} + 6rgm_{t-8} \\ +3rgm_{t-9} + rgm_{t-10} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

et à l'équilibre,  $z = (11/2)rgm$

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{12}\right) (z_t - z_{t-12}) + \left(\frac{1}{12}\right) \left( \begin{array}{c} rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} \\ +rgm_{t-3} + rgm_{t-4} + rgm_{t-5} \\ +rgm_{t-6} + rgm_{t-7} + rgm_{t-8} \\ +rgm_{t-9} + rgm_{t-10} + rgm_{t-11} \end{array} \right)$$

$$y_t = - \left(\frac{1}{12}\right) \left[ \begin{array}{c} z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + z_{t-3} + z_{t-4} \\ +z_{t-5} + z_{t-6} + z_{t-7} + z_{t-8} \\ +z_{t-9} + z_{t-10} + z_{t-11} \end{array} \right] + \left(\frac{1}{12}\right) \left[ \begin{array}{c} 11rgm_t + 10rgm_{t-1} + 9rgm_{t-2} \\ +8rgm_{t-3} + 7rgm_{t-4} + 6rgm_{t-5} \\ +5rgm_{t-6} + 4rgm_{t-7} + 3rgm_{t-8} \\ +2rgm_{t-9} + rgm_{t-10} \end{array} \right]$$

et à l'équilibre,  $y = (11/2)rgm - z$

## 4.2 Annexe II : Périodicité dans le modèle de Fuhrer et Moore

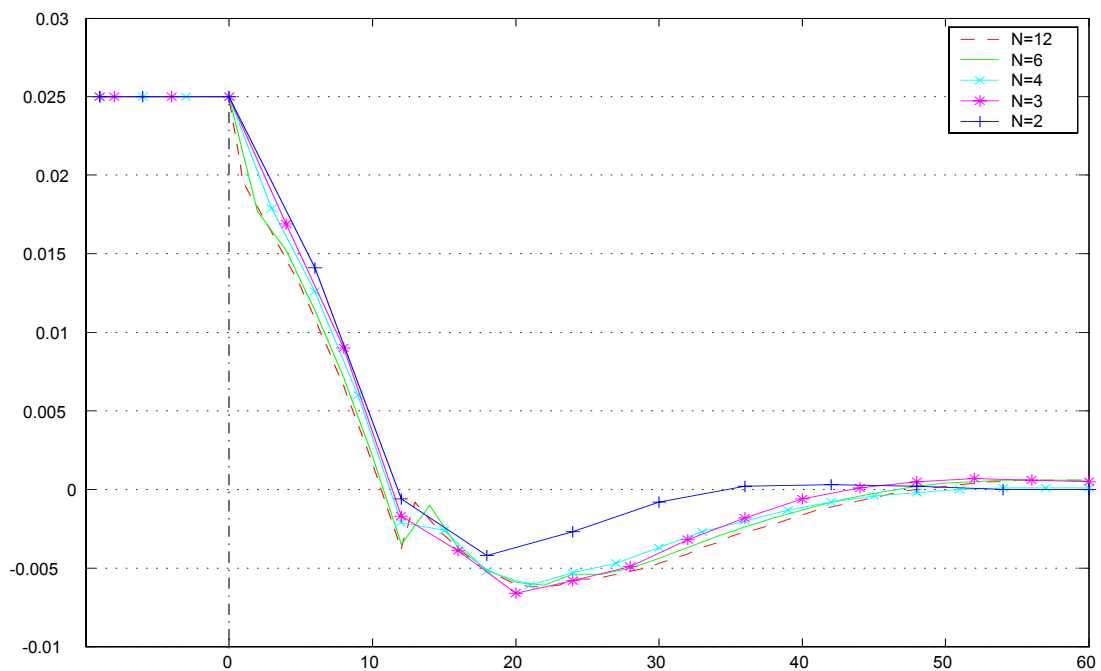


Figure (2.11) : Réponse de l'inflation selon le modèle de Fuhrer & Moore

Il apparaît sur la figure (2.11) que la réponse de l'inflation dans le modèle de Fuhrer et Moore dépend assez peu de la périodicité, sauf dans le cas semestriel impliquant une durée des contrats de deux périodes. Dans ce dernier cas, la persistance est moindre et l'inflation retourne plus rapidement vers son nouveau niveau d'équilibre.

### 4.2.1 Détermination des règles de Fuhrer & Moore en taux de croissance

**4.2.1.1 Calcul de la forme réduite :** Pour le calcul de la forme réduite, on part de :

$$\begin{aligned} y_t &= m_t - p_t \\ x_t - p_t &= \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t (v_{t+i} + \phi y_{t+i}) \\ v_t &= \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{j=0}^{N-1} x_{t-j} - p_{t-j} \\ p_t &= \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} x_{t-k} \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$x_t - p_t = \left(\frac{1}{N^2}\right) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E_t (x_{t+i-j} - p_{t+i-j}) + \left(\frac{\phi}{N}\right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t y_{t+i}$$

Comme :

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E_t U_{t+i-j} = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f_i U_{t-i} + \frac{U_t}{N} + \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f_i E_t U_{t+i}$$

avec,

$$f_i = \left(\frac{N-i}{N}\right) \frac{1}{N-1}$$

il vient :

$$x_t - p_t = \sum_{i=1}^{N-1} f_i (x_{t-i} - p_{t-i}) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i E_t (x_{t+i} - p_{t+i}) + \left(\frac{\phi}{N-1}\right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t y_{t+i}$$

or,

$$\sum_{i=0}^{N-1} E_t y_{t+i} = \sum_{i=0}^{N-1} E_t m_{t+i} - (N-1) \left[ \sum_{i=1}^{N-1} f_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i E_t x_{t+i} \right] - x_t$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\phi}{N-1} - \frac{1}{N}\right) x_t &= \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} + (1-\phi) f_i \right] x_{t-i} - \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_i x_{t-i-j} \\ &+ (1-\phi) \sum_{i=1}^{N-1} f_i E_t x_{t+i} - \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_i E_t x_{t+i-j} \\ &+ \left(\frac{\phi}{N-1}\right) \sum_{i=0}^{N-1} E_t m_{t+i} \end{aligned}$$

#### 4.2.1.2 N=2

$$x_t = -\left(\frac{1}{4\phi+3}\right) x_{t-2} + \left(\frac{3-2\phi}{4\phi+3}\right) x_{t-1} + \left(\frac{1-2\phi}{4\phi+3}\right) E_t x_{t+1} + \frac{4\phi}{4\phi+3} (m_t + E_t m_{t+1})$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que  $z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$\begin{aligned} z_t &= \left(\frac{1}{4\phi+3}\right) [-z_{t-2} + (3-2\phi) z_{t-1} + (1-2\phi) E_t z_{t+1}] \\ &+ \left(\frac{1}{4\phi+3}\right) [rgm_{t-1} - 2(1-\phi) rgm_t + (1+2\phi) E_t rgm_{t+1}] \end{aligned}$$

et à l'équilibre,  $z = (1/2)rgm$  et,

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{2}\right) (z_t - z_{t-2}) + \left(\frac{1}{2}\right) (rgm_t + rgm_{t-1})$$

Aussi, à l'équilibre,  $\Pi = rgm$

#### 4.2.1.3 N=3

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{3(5+3\phi)} \left[ \begin{array}{l} -x_{t-4} - 3x_{t-3} + 3(2-\phi) x_{t-2} \\ + 2(4-3\phi) x_{t-1} + 3(1-2\phi) E_t x_{t+1} \\ + (2-3\phi) E_t x_{t+2} \end{array} \right] \\ &+ \left(\frac{9\phi}{3(5+3\phi)}\right) (m_t + m_{t+1} + m_{t+2}) \end{aligned}$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que  $z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$z_t = \frac{1}{3(5+3\phi)} \begin{bmatrix} -z_{t-4} - 3z_{t-3} + 3(2-\phi)z_{t-2} \\ +2(4-3\phi)z_{t-1} + 3(1-2\phi)E_t z_{t+1} \\ + (2-3\phi)E_t z_{t+2} \end{bmatrix} + \frac{1}{3(5+3\phi)} \begin{bmatrix} +rgm_{t-3} + 4rgm_{t-2} - (2-3\phi)rgm_{t-1} \\ - (10-9\phi)rgm_t + (9\phi+5)E_t rgm_{t+1} \\ + (6\phi+2)E_t rgm_{t+2} \end{bmatrix}$$

et à l'équilibre,  $z = rgm$  et,

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{3}\right)(z_t - z_{t-3}) + \left(\frac{1}{3}\right)(rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2})$$

Aussi, à l'équilibre,  $\Pi = rgm$ .

#### 4.2.1.4 N=4

$$x_t = \frac{1}{2(21+8\phi)} \begin{bmatrix} -x_{t-6} - 3x_{t-5} - 6x_{t-4} + 2(5-2\phi)x_{t-3} \\ +4(3-2\phi)x_{t-2} + 4(4-3\phi)x_{t-1} + 2(3-6\phi)E_t x_{t+1} \\ + (5-8\phi)E_t x_{t+2} + (3-4\phi)E_t x_{t+3} \end{bmatrix} + \left(\frac{16\phi}{2(21+8\phi)}\right)(m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t m_{t+3})$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que  $z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$z_t = \frac{1}{2(21+8\phi)} \begin{bmatrix} -z_{t-6} - 3z_{t-5} - 6z_{t-4} + 2(5-2\phi)z_{t-3} \\ +4(3-2\phi)z_{t-2} + 4(4-3\phi)z_{t-1} + 2(3-6\phi)E_t z_{t+1} \\ + (5-8\phi)E_t z_{t+2} + (3-4\phi)E_t z_{t+3} \end{bmatrix} + \frac{1}{2(21+8\phi)} \begin{bmatrix} rgm_{t-5} + 4rgm_{t-4} + 10rgm_{t-3} + 4\phi rgm_{t-2} \\ -12(1-\phi)rgm_{t-1} - 4(7-6\phi)rgm_t \\ +2(7+12\phi)E_t rgm_{t+1} + 4(2+5\phi)E_t rgm_{t+2} \\ +3(1+4\phi)E_t rgm_{t+3} \end{bmatrix}$$

et à l'équilibre,  $z = (3/2)rgm$  et,

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{4}\right)(z_t - z_{t-4}) + \left(\frac{1}{4}\right)(rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} + rgm_{t-3})$$

Aussi, à l'équilibre, on a :  $\Pi = rgm$ .

**4.2.1.5 N=6** On a :

$$x_t = \frac{1}{165 + 36\phi} \left[ \begin{array}{l} -x_{t-10} - 3x_{t-9} - 6x_{t-8} - 10x_{t-7} - 15x_{t-6} + (21 - 6\phi)x_{t-5} \\ + (23 - 12\phi)x_{t-4} + (27 - 18\phi)x_{t-3} + (33 - 24\phi)x_{t-2} + (41 - 30\phi)x_{t-1} \\ + (15 - 30\phi)E_t x_{t+1} + (14 - 24\phi)E_t x_{t+2} \\ + (12 - 18\phi)E_t x_{t+3} + (9 - 12\phi)E_t x_{t+4} + (5 - 6\phi)E_t x_{t+5} \end{array} \right] \\ + \frac{36\phi}{165 + 36\phi} (m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t m_{t+3} + E_t m_{t+4} + E_t m_{t+5})$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que

$z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$z_t = \frac{1}{165 + 36\phi} \left[ \begin{array}{l} -z_{t-10} - 3z_{t-9} - 6z_{t-8} - 10z_{t-7} - 15z_{t-6} + (21 - 6\phi)z_{t-5} \\ + (23 - 12\phi)z_{t-4} + (27 - 18\phi)z_{t-3} + (33 - 24\phi)z_{t-2} + (41 - 30\phi)z_{t-1} \\ + (15 - 30\phi)E_t z_{t+1} + (14 - 24\phi)E_t z_{t+2} \\ + (12 - 18\phi)E_t z_{t+3} + (9 - 12\phi)E_t z_{t+4} + (5 - 6\phi)E_t z_{t+5} \end{array} \right] \\ + \frac{1}{165 + 36\phi} \left[ \begin{array}{l} + (5 + 30\phi)E_t rgm_{t+5} + (14 + 54\phi)E_t rgm_{t+4} \\ + (26 + 72\phi)E_t rgm_{t+3} + (40 + 84\phi)E_t rgm_{t+2} \\ + (55 + 90\phi)E_t rgm_{t+1} + (-110 + 90\phi)rgm_t \\ + (-69 + 60\phi)rgm_{t-1} + (-36 + 36\phi)rgm_{t-2} \\ + (-9 + 18\phi)rgm_{t-3} + (14 + 6\phi)rgm_{t-4} \\ + 35rgm_{t-5} + 20rgm_{t-6} + 10rgm_{t-7} \\ + 4rgm_{t-8} + rgm_{t-9} \end{array} \right]$$

et à l'équilibre,  $z = (5/2)rgm$  et,

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{6}\right)(z_t - z_{t-6}) + \left(\frac{1}{6}\right) \left( \begin{array}{l} rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} \\ + rgm_{t-3} + rgm_{t-4} + rgm_{t-5} \end{array} \right)$$

et à l'équilibre,  $\Pi = rgm$ .

## 4.2.1.6 N=12

$$\begin{aligned}
x_t = & -\frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} x_{t-22} + 3x_{t-21} + 6x_{t-20} + 10x_{t-19} + 15x_{t-18} + 21x_{t-17} \\ + 28x_{t-16} + 36x_{t-15} + 45x_{t-14} + 55x_{t-13} + 66x_{t-12} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} (78-12\phi)x_{t-11} + (80-24\phi)x_{t-10} + (84-36\phi)x_{t-9} \\ + (90-48\phi)x_{t-8} + (98-60\phi)x_{t-7} + (108-72\phi)x_{t-6} \\ + (120-84\phi)x_{t-5} + (134-96\phi)x_{t-4} + (150-108\phi)x_{t-3} \\ + (168-120\phi)x_{t-2} + (188-132\phi)x_{t-1} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{6(253+24\phi)} E_t \left[ \begin{array}{l} (66-132\phi)x_{t+1} + (65-120\phi)x_{t+2} + (63-108\phi)x_{t+3} \\ + (60-96\phi)x_{t+4} + (56-84\phi)x_{t+5} + (51-72\phi)x_{t+6} \\ + (45-60\phi)x_{t+7} + (38-48\phi)x_{t+8} + (30-36\phi)x_{t+9} \\ + (21-24\phi)x_{t+10} + (11-12\phi)x_{t+11} \end{array} \right] \\
& + \left( \frac{144\phi}{6(253+24\phi)} \right) \left[ \begin{array}{l} m_t + E_t m_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t m_{t+3} \\ + E_t m_{t+4} + E_t m_{t+5} + E_t m_{t+6} \\ + E_t m_{t+7} + E_t m_{t+8} + E_t m_{t+9} \\ + E_t m_{t+10} + E_t m_{t+11} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

À l'équilibre,  $x = m$ . En raisonnant en taux de croissance et en considérant que  $z_t = x_t - m_t$  et  $rgm_{t+i} = m_{t+i} - m$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
z_t = & -\frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} z_{t-22} + 3z_{t-21} + 6z_{t-20} + 10z_{t-19} + 15z_{t-18} + 21z_{t-17} \\ + 28z_{t-16} + 36z_{t-15} + 45z_{t-14} + 55z_{t-13} + 66z_{t-12} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} (78-12\phi)z_{t-11} + (80-24\phi)z_{t-10} + (84-36\phi)z_{t-9} \\ + (90-48\phi)z_{t-8} + (98-60\phi)z_{t-7} + (108-72\phi)z_{t-6} \\ + (120-84\phi)z_{t-5} + (134-96\phi)z_{t-4} + (150-108\phi)z_{t-3} \\ + (168-120\phi)z_{t-2} + (188-132\phi)z_{t-1} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{6(253+24\phi)} E_t \left[ \begin{array}{l} (66-132\phi)z_{t+1} + (65-120\phi)z_{t+2} + (63-108\phi)z_{t+3} \\ + (60-96\phi)z_{t+4} + (56-84\phi)z_{t+5} + (51-72\phi)z_{t+6} \\ + (45-60\phi)z_{t+7} + (38-48\phi)z_{t+8} + (30-36\phi)z_{t+9} \\ + (21-24\phi)z_{t+10} + (11-12\phi)z_{t+11} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} (11+132\phi)rgm_{t+11} + (32+252\phi)rgm_{t+10} \\ + (62+360\phi)rgm_{t+9} + (100+456\phi)rgm_{t+8} \\ + (145+540\phi)rgm_{t+7} + (196+612\phi)rgm_{t+6} \\ + (252+672\phi)rgm_{t+5} + (312+720\phi)rgm_{t+4} \\ + (375+756\phi)rgm_{t+3} + (440+780\phi)rgm_{t+2} \\ + (506+792\phi)rgm_{t+1} \end{array} \right] \\
& - \frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} (1012-792\phi)rgm_t + (824-660\phi)rgm_{t-1} \\ + (656-540\phi)rgm_{t-2} + (506-432\phi)rgm_{t-3} \\ + (372-336\phi)rgm_{t-4} + (252-252\phi)rgm_{t-5} \\ + (144-180\phi)rgm_{t-6} + (46-120\phi)rgm_{t-7} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{6(253+24\phi)} \left[ \begin{array}{l} (44+72\phi)rgm_{t-8} + (128+36\phi)rgm_{t-9} \\ + (208+12\phi)rgm_{t-10} + 286rgm_{t-11} \\ + 220rgm_{t-12} + 165rgm_{t-13} \\ + 120rgm_{t-14} + 84rgm_{t-15} \\ + 56rgm_{t-16} + 35rgm_{t-17} + 20rgm_{t-18} \\ + 10rgm_{t-19} + 4rgm_{t-20} + rgm_{t-21} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

et à l'équilibre,  $z = (11/2)rgm$ .

$$\Pi_t = \left( \frac{1}{12} \right) (z_t - z_{t-12}) + \left( \frac{1}{12} \right) \left( \begin{array}{l} rgm_t + rgm_{t-1} + rgm_{t-2} \\ + rgm_{t-3} + rgm_{t-4} + rgm_{t-5} \\ + rgm_{t-6} + rgm_{t-7} + rgm_{t-8} \\ + rgm_{t-9} + rgm_{t-10} + rgm_{t-11} \end{array} \right)$$

et à l'équilibre,  $\Pi = rgm$ .



## Deuxième partie

# Densité Spectrale & Identification des Changements Structurels dans l’Inflation Américaine<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup>Cette partie a bénéficié de plusieurs travaux : Ahamada & Ben Aïssa (2004a & 2004b), Ben Aïssa & Jouini (2003), Ben Aïssa, Boutahar & Jouini (2004) et Ben Aïssa & Boutahar (2004).

# Chapitre 3

## La Théorie de l'Analyse Spectrale

### Introduction

L'analyse spectrale joue un rôle important dans les études quantitatives des cycles des affaires en économie. La méthode utilisée pour extraire la tendance et le cycle d'une série temporelle consiste à décomposer cette série en somme de deux composantes, tendancielle et cyclique. La tendance symbolise le potentiel de l'économie et la composante stationnaire représente l'écart entre les observations effectives et le potentiel de l'économie. Une telle décomposition entre tendance et cycle n'est pas unique, d'où l'existence de diverses techniques d'extraction de cycle. Parmi les méthodes les plus célèbres, on peut citer celle de Hodrick & Prescott (1980) et celle de Baxter & King (1999). L'outil statistique utilisé pour extraire les cycles est la densité spectrale, autrement dit, c'est l'outil descriptif des données dans le domaine des fréquences. C'est dans le cadre de recherche de cycles que la théorie spectrale est bien connue dans la description des données économiques et c'est probablement l'une des ses premières applications. Cependant, la théorie spectrale est un outil très puissant qui peut servir dans d'autres applications tels que les tests de stationnarité. Mais, les résultats de telles applications aussi bien que l'usage pour

la recherche des cycles, n'ont de sens que sous l'hypothèse forte de stationnarité<sup>1</sup>. Il s'agit d'une hypothèse improbable et difficilement défendable pour de nombreuses variables économiques et financières. Une telle hypothèse supposerait, par exemple, que les données économiques gardent les mêmes propriétés statistiques aussi bien à la période pré que post industrielle et ce, malgré les différentes techniques de production. Le développement dans la littérature économique et statistique des modèles à changement de régimes confirme la difficulté de décrire une série longue à l'aide d'un seul modèle stationnaire. Nous nous proposons d'adapter la théorie spectrale aux données qui ne sont pas forcément stationnaires.

Lorsqu'un processus est stationnaire dans le sens où les moments du premier et second ordre ne dépendent pas du temps mais, plutôt des écarts entre les points d'observations de la série, alors les théorèmes dits de représentations s'appliquent. Les résultats essentiels énoncés par ces théorèmes peuvent se résumer de la manière suivante : (i) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus soit stationnaire est qu'il puisse être décomposé dans une base exponentielle avec des amplitudes aléatoires, orthogonales, invariables avec le temps et qui dépendent exclusivement des fréquences. Les carrés des modules des amplitudes définissent le spectre. (ii) La densité spectrale d'un processus stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction de covariance. Autrement dit, la densité spectrale et la fonction de covariance sont deux paires de Fourier. Inversement, toute fonction possédant les caractéristiques d'une densité spectrale définit une fonction de covariance d'un processus stationnaire. Le lien entre les deux domaines temporel et fréquentiel est assuré, tout particulièrement, par le théorème (ii). Dans le cas stationnaire, il est à remarquer que la fonction de covariance (caractérisant le domaine temporel) et la densité spectrale

---

<sup>1</sup>La stationnarité exigée est celle des moments du premier et second ordre.

(spécifiant le domaine fréquentiel) sont en correspondance biunivoque. Relâcher une telle hypothèse (celle de la stationnarité) suppose que les moments du processus varient avec le temps. Par conséquent, nous considérons une densité spectrale qui dépendra non seulement des fréquences, mais aussi du temps pour décrire une telle fonction de covariance.

Dans un premier temps, nous abordons l'analyse spectrale dans le cas des données stationnaires. Nous exposons les fondements théoriques de cette analyse ainsi que les théorèmes qui relient les deux domaines temporel et fréquentiel. Ensuite, nous donnons une revue des différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale.

Dans un deuxième temps, nous relâchons l'hypothèse de stationnarité. Nous exposons les définitions d'une telle densité spectrale les plus utilisées dans la littérature. Une revue des techniques d'estimation de la densité spectrale évoluant avec le temps sont proposées et un exemple pratique d'estimation est mis en œuvre en fin de chapitre.

## 1 Processus Stationnaires

Les quelques tentatives de développement de l'analyse spectrale pendant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle n'ont pas trouvé un grand succès. Les deux raisons majeures de cet échec sont dues, d'abord, au fait que la modélisation paramétrique des séries temporelles a connu des progrès économétriques incontestables [ les processus autorégressifs ou à moyennes mobiles développés par Yule dans les années 1920-1930], ensuite, au fait que les quelques techniques possibles d'estimation de la densité spectrale bien qu'elles aient été sans biais, manquaient énormément de consistance à l'exemple du périodogramme considéré par Beveridge (1921) pour l'identification des cycles caractérisant les fluctuations des prix du blé en grande Bretagne.

Le problème de l'inconsistance de l'estimateur a été résolu en proposant des moyens de lissage du périodogramme qui conduisent à des estimateurs consistants et crédibles de la densité spectrale. Il va falloir attendre les années quatre-vingt pour voir un véritable développement de l'analyse spectrale. Mise à part l'usage de la densité spectrale dans l'étude des cycles des affaires, d'autres thèmes sont également repris dans le domaine des fréquences, tels que le thème de la cointégration et des racines unitaires<sup>2</sup>.

## 1.1 Les théorèmes fondamentaux

Nous présentons les théorèmes fondamentaux dans le domaine des fréquences tout particulièrement le théorème de représentation spectrale et le théorème de décomposition de la fonction de covariance.

Dans le cadre des séries temporelles stationnaires, la stationnarité au sens faible d'une série  $\{X_t\}$  est assurée par la stabilité du moment du second ordre :  $E|X_t|^2 < \infty$ ,  $E(X_t)$  indépendant de  $t$  et  $E(X_{t+h}\overline{X_t})$  indépendant de  $t$ . La notation  $\overline{X_t}$  désigne la valeur complexe conjuguée de  $X_t$ . Dans ces conditions, la fonction  $R(h) = E(X_{t+h}\overline{X_t}) - E(X_{t+h})E(\overline{X_t})$  désigne la fonction de covariance de  $X_t$ . Réciproquement, étant donnée une fonction  $R(h)$  à valeurs complexes et définie dans l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$ , alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $R(h)$  soit la fonction de covariance d'un processus stationnaire est que  $R(h)$  soit hermitienne et définie positive, i.e. :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \forall (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{C}^n, R(h) = \overline{R(-h)} \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i R(i-j) \overline{a_j} \geq 0 \quad (3.1)$$

---

<sup>2</sup>Voir les travaux de Phillips & Ouliaris (1988), Choi & Phillips (1993), Diebold, Ohabian & Berkowitz (1998), Berkowitz (2001), Levy (2000) et Phillips Ouliaris & Corbae (2002).

Le théorème d'Herglotz donne l'équivalent de ce résultat dans le domaine des fréquences.

### **Théorème d'Herglotz**

Une fonction  $R(h)$  à valeurs complexes et définie dans l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  est la fonction de covariance d'un processus stationnaire  $\{X_t\}$  si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée : (i) il existe une fonction  $F_X(\lambda)$  continue à droite, non décroissante et bornée sur  $(-\pi, \pi)$  avec  $F_X(-\pi) = 0$  telle que :

$$R(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_X(\lambda), \forall h \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

(ii)  $R(h)$  est hermitienne et définie positive, i.e. :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \forall (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{C}^n, R(h) = \overline{R(-h)} \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i R(i-j) \overline{a_j} \geq 0. \quad (3.3)$$

La fonction  $F_X(\lambda)$  est la fonction de distribution spectrale de  $R(h)$  et de  $\{X_t\}$ . S'il existe une fonction  $f_X(\lambda)$  telle que  $F_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_X(\theta) d\theta$ , alors  $f_X(\lambda)$  est appelée densité spectrale de  $R(h)$  et de  $\{X_t\}$ . La relation (3.2) peut donc s'écrire sous la forme :

$$R(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f_X(\lambda) d\lambda, \forall h \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

et en particulier :

$$\text{var}(X) = R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda) d\lambda \quad (3.5)$$

Le théorème d'Herglotz, parfois appelé théorème de Khintchine, est un lien entre les deux domaines temporel et fréquentiel. Le comportement de la série dans le domaine

des fréquences, décrit par la fonction densité spectrale, est directement traduit dans la fonction de covariance par la relation (3.5). Inversement, si  $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |R(h)| < \infty$ , alors :

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ih\lambda} R(h), \forall \lambda \in (0, \pi) \quad (3.6)$$

Ainsi, le comportement de la série dans le domaine temporel, décrit par la fonction de covariance, est également traduit dans la fonction de la densité spectrale via la relation (3.6). Enfin, le théorème d'Herglotz illustre la décomposition de la variance en fonction de fréquences. Le deuxième théorème est le théorème de représentation spectrale aléatoire.

### **Théorème de représentation spectrale aléatoire**

*Soit  $\{X_t\}$  un processus stationnaire ayant  $F_X$  comme fonction de distribution spectrale. On suppose que  $E(X_t) = 0$ . Alors, il existe un processus orthogonal  $\{Z(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi\}$  tel que :*

$$E(|Z(\lambda) - Z(-\pi)|^2) = F_X(\lambda), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (3.7)$$

*et,*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda). \quad (3.8)$$

Ce théorème montre que tout processus stationnaire peut se décomposer dans une base trigonométrique avec des amplitudes aléatoires  $dZ(\lambda)$ . Le théorème d'Herglotz définit la fonction de distribution spectrale à partir de la fonction de covariance, alors que le théorème de représentation spectrale aléatoire présente une autre définition qui reste équivalente mais qui est exprimée en fonction des amplitudes  $Z(\lambda)$ .

Le théorème de représentation spectrale aléatoire indique l'existence du processus orthogonal  $\{Z(\lambda)\}$ . Le théorème suivant montre la façon avec laquelle nous déterminons  $\{Z(\lambda)\}$  à partir du processus observé  $\{X_t\}$ .

**Théorème de détermination de  $\{Z(\lambda)\}$**

Soit  $\{X_t\}$  un processus stationnaire de représentation spectrale  $X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda)$ , ayant  $F_X$  comme fonction de distribution spectrale et ayant  $\gamma(j)$  comme fonction de covariance. Si  $\omega$  et  $\nu$  sont deux points où  $F_X$  est continue avec  $-\pi < \nu < \omega < \pi$ , alors quand  $n \mapsto \infty$  on a :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|j| \leq n} X_j \left( \int_{\nu}^{\omega} e^{-ij\lambda} d\lambda \right) \xrightarrow{m,q} Z(\omega) - Z(\nu) \quad (3.9)$$

et,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|j| \leq n} \gamma(j) \left( \int_{\nu}^{\omega} e^{-ij\lambda} d\lambda \right) \mapsto F(\omega) - F(\nu) \quad (3.10)$$

où la notation  $\xrightarrow{m,q}$  désigne la convergence en moyenne quadratique.

Enfin, la définition de la densité spectrale telle qu'elle a été introduite dans les paragraphes ci-dessus n'implique aucune modélisation quelconque de  $\{X_t\}$ . Cependant, pour certains modèles tels que les processus AR, MA et ARMA, la forme de  $f_X(\lambda)$  est connue.

**Théorème de représentation spectrale pour les processus ARMA(p, q)**

Si  $\{X_t\}$  est un processus ARMA(p, q) stationnaire, alors on a :

$$P(B)X_t = Q(B)\varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.11)$$

Le processus  $\{X_t\}$  peut être ré-écrit aussi en fonction des polynômes  $P(B)$  et  $Q(B)$  où  $B$  est l'opérateur de retard ( $B^L X_t = X_{t-L}$ ) et de degré respectifs  $p$  et  $q$  tel que :



$$P(B)X_t = Q(B)\varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.12)$$

alors,

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{Q(e^{-i\lambda})}{P(e^{-i\lambda})} \right|^2. \quad (3.13)$$

### **Théorème de représentation spectrale pour les processus $AR(p)$**

Si  $f$  est une densité spectrale continue d'un processus réel stationnaire et  $\varepsilon$  un réel strictement positif donné, alors il existe un processus  $AR(p)$  causal<sup>3</sup> :

$$X_t + a_1X_{t-1} + \cdots + a_pX_{t-p} = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.14)$$

Le processus  $\{X_t\}$  peut être ré-écrit aussi en fonction des polynômes  $P(B)$  et  $Q(B)$  respectivement d'ordre  $p$  et  $q$  tel que :

$$P(B)X_t = Q(B)\varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.15)$$

avec :

$$P(B) = 1 + a_1B + \cdots + a_pB^p \quad \text{et} \quad Q(B) \equiv 1 \quad (3.16)$$

tel que,

$$|f_X(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon, \quad \forall \lambda \in (-\pi, \pi). \quad (3.17)$$

---

<sup>3</sup>Un processus  $\{X_t\}$  est dit causal dans le sens où on peut l'écrire sous la forme suivante :  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ .

**Théorème de représentation spectrale pour les processus  $MA(q)$** 

Si  $f$  est une densité spectrale continue d'un processus réel stationnaire et  $\varepsilon$  un réel strictement positif donné, alors il existe un processus  $MA(q)$  inversible<sup>4</sup> :

$$X_t = Z_t + a_1 Z_{t-1} + \cdots + a_q Z_{t-q}, \quad Z_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.18)$$

Le processus  $\{X_t\}$  peut être ré-écrit aussi en fonction des polynômes  $P(B)$  et  $Q(B)$  de degré respectifs  $p$  et  $q$  tel que :

$$P(B)X_t = Q(B)\varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad \text{où} \quad \sigma^2 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda) d\lambda}{(1 + c_1^2 + \cdots + c_q^2)} \quad (3.19)$$

avec :

$$Q(B) = 1 + c_1 B + \cdots + c_p B^p \quad \text{et} \quad P(B) \equiv 1 \quad (3.20)$$

tel que,

$$|f_X(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon, \quad \forall \lambda \in (-\pi, \pi). \quad (3.21)$$

Le fondement théorique de la densité spectrale est justifié par les théorèmes que nous avons évoqués. Nous pouvons présenter les différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale dans le cas des données stationnaires.

**1.2 Méthodes d'estimation de la densité spectrale classique**

Nous présentons les différentes techniques d'estimation de la densité spectrale  $f(\lambda)$  à une fréquence  $\lambda$ , étant donnée une seule réalisation finie d'une variable aléatoire stationnaire  $\{X_t\}_{t=1}^T$ . On suppose que  $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $E(X_t) = 0$ .

---

<sup>4</sup>Un processus  $\{Z_t\}$  est dit inversible dans le sens où on peut l'écrire sous la forme suivante :  $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$ .

### 1.2.1 Les estimateurs quadratiques

Nous entendons par estimateur de type quadratique un estimateur qui a la forme suivante :

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^T a_{tu}(\lambda) X_t X_u \quad (3.22)$$

où l'ensemble  $\{a_{tu}(\lambda)\}$  constitue une base de décomposition de  $\{X_t X_u\}_{(t,u) \in \mathbb{Z}^2}$ . Ainsi, par exemple, le périodogramme  $I(\lambda)$  est un estimateur quadratique, avec :

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^T X_t X_u e^{i(t-u)\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} c(u) e^{-iu\lambda} \quad (3.23)$$

où,

$$c(u) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|u|} X_t X_{t+u} \quad (3.24)$$

$c(u)$  est un estimateur consistant de la fonction de covariance de  $\{X_t\}$ . Si la densité spectrale théorique est continue, alors il est bien connu que le périodogramme  $I(\lambda)$  est un estimateur asymptotiquement sans biais et pour deux fréquences distinctes  $\lambda$  et  $\mu$ , les valeurs  $I(\lambda)$  et  $I(\mu)$  sont non corrélées (asymptotiquement). Par contre, le périodogramme présente généralement beaucoup de fluctuations traduites par le fait que c'est un estimateur qui n'est pas consistant. On peut résumer sous de faibles hypothèses les propriétés statistiques de  $I(\lambda)$  comme suit<sup>5</sup> :

$$E(I(\lambda)) = f(\lambda) + O(T^{-1}) \quad (3.25)$$

$$\text{var}(I(\lambda)) = f(\lambda)^2 + O(T^{-1}) \quad (3.26)$$

---

<sup>5</sup>Voir Brillinger (1981).

$$\text{cov}(I(\lambda), I(\mu)) = O(T^{-1}) \quad (3.27)$$

$$I(\lambda_j) \sim \frac{f(\lambda_j)}{2} \chi_2^2 \quad (3.28)$$

avec  $\lambda, \mu \in (0, \pi)$  et  $\lambda_j$  désignant les fréquences fondamentales, i.e,  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$ ,  $j = 1, \dots, \frac{T}{2}$ . Généralement, on réduit les fluctuations de  $I(\lambda)$  en éliminant les  $c(u)$  associés à des grandes valeurs de  $u$ . Pour cela, on peut utiliser une fenêtre,  $k_M(u) = k(u/M)$  qui tend vers zéro quand  $|u|$  devient de plus en plus grand. On obtient ainsi un estimateur  $\hat{f}_C(\lambda)$  de la forme :

$$\hat{f}_C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} k_M(u) c(u) e^{-i\lambda u} \quad (3.29)$$

La fenêtre  $k_M(u)$  est choisie comme une fonction paire et a un maximum à l'origine,  $\forall u \in \mathbb{Z}$ ,  $k_M(u) = k_M(-u)$ ;  $k_M(0) = 1$ . Le paramètre  $M$  joue un rôle central dans les propriétés asymptotiques de  $\hat{f}_C(\lambda)$  dans le sens où  $M$  permet un arbitrage entre le biais et la variance. C'est un paramètre d'ajustement de la largeur de la fenêtre. Plus précisément, choisir une petite valeur de  $M$  permet de réduire la variance, en revanche on introduit un biais. Pour réaliser cet arbitrage, on choisit  $M$  de façon à ce qu'il tende vers l'infini quand  $T$  tend vers l'infini, mais moins rapidement<sup>6</sup> que  $T$ . Ainsi, la consistance de  $\hat{f}_C(\lambda)$  peut être obtenue.

Souvent, dans la pratique, plutôt que d'agir sur la fonction de covariance, on procède à un lissage direct du périodogramme pour réduire ses fluctuations. En effet, si la densité spectrale théorique varie doucement au voisinage de  $\lambda$ , alors les  $I(\lambda_j)$  se comportent approximativement comme des variables indépendantes de moyenne

---

<sup>6</sup>Le rapport  $M/T$  doit tendre vers zéro lorsque  $T$  devient de plus en plus élevé.

$f(\lambda)$  pour les  $\lambda_j$  proches de  $\lambda$ . C'est à dire qu'une moyenne pondérée des  $I(\lambda_j)$  autour de  $\lambda$  permet de construire un estimateur un peu plus précis. D'où l'estimateur  $\hat{f}_p(\lambda)$  suivant :

$$\hat{f}_p(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{j=1}^T K_M(\lambda - \lambda_j) I(\lambda_j) \quad (3.30)$$

avec  $K_M(\lambda)$  la fonction fenêtre spectrale.  $K_M(\lambda)$  est  $2\pi$  périodique et doit être bien concentrée autour de l'origine avec :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} K_M(\lambda) = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda = 0 \\ 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Si on choisit dans les expressions de  $\hat{f}_C(\lambda)$  et  $\hat{f}_p(\lambda)$  les fenêtres  $k_M(u)$  et  $k_M(\lambda)$  telles que :

$$k_M(u) = \int_{-\pi}^{\pi} K_M(\lambda) e^{iu\lambda} d\lambda \quad (3.32)$$

alors,

$$\hat{f}_C(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} K_M(\lambda - \theta) I(\theta) d\theta \quad (3.33)$$

Ainsi, l'estimateur  $\hat{f}_p(\lambda)$  peut être vu comme une approximation discrète de  $\hat{f}_C(\lambda)$ . Comme les fréquences fondamentales  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$  utilisées dans l'expression de  $\hat{f}_p(\lambda)$  couvrent de plus en plus l'intervalle  $(-\pi, \pi)$  lorsque  $T$  devient grand, alors les deux estimateurs  $\hat{f}_C(\lambda)$  et  $\hat{f}_p(\lambda)$  sont asymptotiquement équivalents.

### 1.2.1.1 Propriétés statistiques de $\hat{f}_p(\lambda)$ et $\hat{f}_C(\lambda)$

Vu que les deux estimateurs sont asymptotiquement équivalents,  $\hat{f}_p(\lambda)$  et  $\hat{f}_C(\lambda)$  se partagent les mêmes propriétés statistiques. C'est pourquoi, nous considérons

seulement les propriétés statistiques de l'estimateur  $\widehat{f}_C(\lambda)$ . Pour des paramètres  $M$  fixé et  $T$  assez grand, nous pouvons écrire :

$$\text{var}(\widehat{f}_C(\lambda)) = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} K_M(\lambda - \theta) f^2(\theta) d\theta, \quad \text{pour } \lambda \neq 0 \quad (3.34)$$

$$\text{cov}(\widehat{f}_C(\lambda), \widehat{f}_C(\nu)) = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} K_M(\lambda - \theta) K_M(\nu - \theta) f^2(\theta) d\theta, \quad \text{pour } \lambda \neq 0 \quad (3.35)$$

Les relations (3.34) et (3.35) montrent l'influence des formes géométriques de  $K_M(\theta)$  et  $f(\lambda)$  sur le biais de  $\widehat{f}_C(\lambda)$ . En effet, si  $K_M(\theta)$  est concentrée à l'origine tout en décroissant rapidement et si  $f(\lambda)$  varie peu sur cette zone de concentration de  $K_M(\theta)$ , alors au voisinage de  $\lambda$  nous avons  $K_M(\theta) f(\lambda - \theta) \simeq K_M(\theta) f(\lambda)$  et par conséquent  $\lim_{T \rightarrow \infty} E(\widehat{f}_C(\lambda)) \simeq f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} K_M(\theta) d\theta$  si on choisit  $K_M(\theta)$  telque  $\int_{-\pi}^{\pi} K_M(\theta) d\theta = 1$ . Ainsi, théoriquement l'estimateur  $\widehat{f}_C$  est asymptotiquement sans biais, mais si ce résultat dépend de la fenêtre  $K_M(\theta)$ , il dépend également du comportement de la densité théorique  $f(\lambda)$ . Ces constatations deviennent encore plus claires si on suppose que  $f(\lambda)$  est plusieurs fois dérivable. En effet, si c'est le cas, alors un développement de Taylor de  $f(\lambda)$  permet de réécrire la relation (3.34) tel que :

$$E(\widehat{f}_C(\lambda)) = f(\lambda) + \frac{f''(\lambda)^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 K_M(\theta) d\theta \quad (3.36)$$

en supposant que  $\int_{-\pi}^{\pi} \theta K_M(\theta) d\theta = 0$ . Ainsi, si  $f''(\lambda) \simeq 0$ , c'est à dire  $f$  varie peu au voisinage de  $\lambda$ , alors  $\widehat{f}_C(\lambda)$  est non biaisé. De la même manière, si  $\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 K_M(\theta) d\theta$  est négligeable, i.e., si la largeur de bande<sup>7</sup> de  $K_M(\theta)$  est faible, alors  $\widehat{f}_C(\lambda)$  est approximativement sans biais.

---

<sup>7</sup>la quantité  $\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 K_M(\theta) d\theta$  est une définition possible de la largeur de bande. En effet, plusieurs définitions existent dans la littérature, voir Priestley (1981), par exemple.

### Estimateur PLE (Penalized Likelihood Estimate)

La fonction de vraisemblance pour l'estimation spectrale proposée par Whittle (1962) est généralement utilisée dans le contexte d'estimation paramétrique. Cependant, Pawitan et O'Sullivan (1994) proposent de déterminer un estimateur de la densité spectrale en se fondant sur une minimisation de la vraisemblance de Whittle corrigée par un terme de pénalité. La procédure d'estimation devient totalement non paramétrique. Elle est basée sur la recherche d'une fonction périodique  $\theta^*$  qui minimise en  $\theta$  la fonction strictement convexe suivante :

$$L_{T\mu}(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=[-\frac{T}{2}]+1}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} (\theta(\lambda_k) + e^{-\theta(\lambda_k)} I(\lambda_k)) + \mu \sum_{k=[-\frac{T}{2}]+1}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} k^{2m} |\Theta_k|^2 \quad (3.37)$$

où  $\lambda_k = \frac{2\pi k}{T}$  (avec  $k = [-\frac{T}{2}] + 1, \dots, [\frac{T}{2}]$ ),  $\mu$  et  $m$  des réels,  $I(\lambda_k)$  le périodogramme et  $\Theta_k$  la composante d'ordre  $k$  de la transformée de Fourier discrète des

$\{\theta(\lambda_j), j = [-\frac{T}{2}] + 1, \dots, [\frac{T}{2}]\}$ , i.e., pour  $T$  grand  $\Theta_k \simeq \int \theta(\omega) e^{-2\pi i k \omega} d\omega$ . Lorsque  $T$  tend vers l'infini, alors l'expression discrète :

$$W = \frac{1}{T} \sum_{k=[-\frac{T}{2}]+1}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} (\theta(\lambda_k) + e^{-\theta(\lambda_k)} I(\lambda_k)) \quad (3.38)$$

tend vers l'expression continue :

$$WC = \int_{-0.5}^{0.5} (\theta(\lambda) + e^{-\theta(\lambda)} f_0(\lambda)) d\lambda \quad (3.39)$$

avec  $f_0(\lambda)$  la vraie densité spectrale. Cette dernière expression  $WC$  est minimale pour  $\theta^{(1)} = \log f_0$ , ce qui justifie l'usage de l'expression  $W$  pour la recherche d'un estimateur de la densité spectrale. L'introduction du terme de pénalité :

$$\mu \sum_{k=\lceil -\frac{T}{2} \rceil + 1}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} k^{2m} |\Theta_k|^2 \quad (3.40)$$

est censé capter les propriétés locales de  $f_0$  dans l'estimateur. Le paramètre  $\mu > 0$  contrôle le degré de lissage dans la procédure d'estimation. Les auteurs ont montré que la solution du problème de minimisation (3.40) est obtenue en choisissant une fonction initiale  $\theta^0$ , puis en calculant alternativement les expressions (3.41) et (3.42) suivantes :

$$z_k = \theta^0(\lambda_k) + e^{-\theta^0(\lambda_k)} I(\lambda_k) - 1 \quad (3.41)$$

$$\theta(\lambda_j) = \frac{1}{T} \sum_k (1 + \mu k^{2m})^{-1} Z_k e^{2\pi i j k / T} \quad (3.42)$$

où  $Z_k$  est la composante d'ordre  $k$  de la transformée de Fourier des  $\{z_i, i = \lceil -\frac{T}{2} \rceil + 1, \dots, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor\}$  calculés à partir de (3.41). Les calculs alternatifs se poursuivent jusqu'à la convergence de  $\theta$  vers  $\theta^*$ . Ainsi,  $\hat{f}(\lambda_j) = e^{\theta^*(\lambda_j)}$  constitue un estimateur de la densité spectrale aux fréquences de Fourier  $\lambda_j$ . Les valeurs initiales suggérées par les auteurs sont :

$$\theta^0(\lambda_j) = \log I(\lambda_j) + 1.3064313 \quad (3.43)$$

soit,

$$z_j = \log I(\lambda_j) + 0.577216 \quad (3.44)$$

avec  $j = \lceil -\frac{T}{2} \rceil + 1, \dots, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor$ . Selon Pawitan et O'Sullivan (1994), cet algorithme est convergent au bout de cinq itérations et l'estimateur ainsi obtenu converge en probabilité vers la vraie densité spectrale.



## 1.2.2 Les estimateurs non quadratiques

Dans les paragraphes ci-dessus, nous avons vu que l'efficacité des estimateurs non-paramétriques dépendait de plusieurs facteurs parmi lesquels la forme de la densité spectrale théorique à estimer. En particulier aux voisinages des pics, il peut y avoir des problèmes de précision à cause de la variation brutale de la fonction. Pour résoudre ce problème, on a souvent recours aux estimateurs paramétriques puisqu'une fois les paramètres sont estimés, on peut les utiliser dans des fonctions connues qui expriment les densités spectrales des modèles utilisés. On obtient ainsi des courbes régulières. Nous citons dans ce paragraphe quelques unes de ces méthodes appelées non quadratiques.

### 1.2.2.1 Prélavage et recoloration :

Cette technique est généralement utilisée en combinaison avec les techniques non-paramétriques. Supposons que nous ayons à estimer à priori une densité spectrale  $f$  comportant de nombreux pics significatifs et peu de creux, une telle fonction peut théoriquement avoir la forme suivante :

$$f(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{\left| \sum_{j=0}^p a_j e^{ij\lambda} \right|^2} \quad (3.45)$$

où la fonction  $c(\lambda)$  est relativement plate. Le dénominateur de (3.45) peut suivant les choix de  $p$  et les  $a_j$  expliquer le nombre des pics de  $f$ . Pour "pré-blanchir" la série, on estime un modèle autorégressif  $AR(p)$  par moindre carré ou par les relations de Yule-Walker. Nous procédons ensuite au calcul des résidus. Puis, nous estimons  $c(\lambda)$  avec un estimateur non quadratique à l'aide des résidus ainsi obtenus. Enfin, nous "recolorons" en estimant  $f(\lambda)$  par :

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{c}(\lambda)}{\left| \sum_{j=0}^p \hat{a}_j e^{ij\lambda} \right|^2} \quad (3.46)$$

### 1.2.2.2 Estimateur basé sur les modèles $ARMA(p, q)$

Nous pouvons d'abord estimer un modèle  $ARMA(p, q)$ , puis utiliser les formules connues des densités spectrales de tels modèles. Nous obtenons ainsi un estimateur de la forme suivante :

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{\sigma}^2 \left| \sum_{j=0}^q \hat{b}_j e^{ij\lambda} \right|^2}{2\pi \left| \sum_{j=0}^p \hat{a}_j e^{ij\lambda} \right|^2} \quad (3.47)$$

Les paramètres sont estimés en utilisant les méthodes habituelles.  $\hat{f}(\lambda)$  est un estimateur qui s'adapte bien aux densités spectrales comportant à la fois des creux et des pics. Plus généralement, on peut modéliser la densité spectrale sous la forme  $f(\lambda, \theta)$ ,  $\theta$  étant le vecteur des paramètres à estimer et la détermination de  $\hat{f}$  devient un problème classique de statistique paramétrique.

### 1.2.2.3 Estimateur autorégressif maximum d'entropie

L'estimateur autorégressif d'ordre  $m$  de la densité spectrale  $f$ , appelé  $\hat{f}_m(\lambda)$ , est celui calculé à partir d'une modélisation  $AR(m)$  de  $\{X_t\}$  :

$$X_t - \sum_{j=1}^m a_{mj} X_{t-j} = Z_t \quad \text{où } \{Z_t\} \sim N(0, v_m) \quad (3.48)$$

Les paramètres  $\hat{a} = (\hat{a}_{m1}, \dots, \hat{a}_{mm})'$  et  $\hat{v}_m$  sont les estimateurs calculés récursivement à l'aide des équations de Yule-Walker [voir Brockwell & Davis (1991)] et le choix de

$m$  est déterminé selon les critères classiques<sup>8</sup> tels que les critères BIC, SIC, YIC ou MIC. Ainsi, on peut écrire :

$$\hat{f}_m(\lambda) = \frac{\hat{v}_m}{2\pi \left| 1 - \sum_{j=1}^m \hat{a}_{mj} e^{-ij\lambda} \right|^2} \quad (3.49)$$

$\hat{f}_m(\lambda)$  est la fonction qui maximise l'entropie  $E$  suivante :

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} \log g(\lambda) d\lambda \quad (3.50)$$

où l'argument  $g$  appartient à la classe des fonctions densités qui satisfassent les contraintes suivantes :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijh\lambda} g(\lambda) d\lambda = c(h), \quad h = 0, \pm 1, \dots, \pm m.$$

avec  $c(h)$  un estimateur consistant de la fonction de covariance. On peut ainsi obtenir un estimateur de la densité spectrale en maximisant l'entropie  $E$ .

#### 1.2.2.4 Estimateur de Pisarenko<sup>9</sup>

Notons que  $C = (c_{ij})$  est une matrice de dimension  $M \times M$ , avec  $c_{ij} = c(i-j)$ , c'est à dire la covariance d'ordre  $i-j$ . Notons, par ailleurs, que  $\phi_\mu$ , pour  $u = 1, \dots, M$ , sont les valeurs propres de  $C$  et que  $\psi_u$ ,  $u = 1, \dots, M$  sont les vecteurs propres correspondants<sup>10</sup>. Soit  $H(\phi)$  une fonction strictement monotone avec  $H^{-1} = h$ .

Pisarenko (1973) propose l'estimateur suivant :

<sup>8</sup>Nous allons appliquer dans le chapitre 4 ces critères dans le cadre d'identification des ruptures correspondant à de l'instabilité dans la moyenne.

<sup>9</sup>Voir Brillinger & Krishnaiah (1983)

<sup>10</sup> $\psi_{uj}$  est le  $j^{\text{ème}}$  élément du vecteur  $\psi_u$ .

$$\widehat{f}(\lambda) = h \left( \frac{1}{2\pi M} \sum_{j=1}^M H(\phi_j) \left| \sum_{j=1}^M \psi_{uj} e^{ij\lambda} \right|^2 \right) \quad (3.51)$$

Si  $H(\phi) = \phi$ , alors  $\widehat{f}(\lambda)$  est réduit à un estimateur quadratique et si au contraire  $H$  n'est pas linéaire, alors  $\widehat{f}(\lambda)$  est un estimateur non quadratique. En particulier, pour  $H(\phi) = 1/\phi$ ,  $\widehat{f}(\lambda)$  est un estimateur non quadratique<sup>11</sup> de Capon (1969). L'estimateur de Pisarenko a des propriétés similaires à celles des estimateurs quadratiques avec un objectif de produire moins de biais dans les régions des pics spectraux.

Nous avons présenté les théorèmes fondamentaux de l'analyse spectrale classique. Le théorème d'Herglotz (par équivalence le théorème de représentation spectrale) constitue un pont entre les deux domaines temporel (fonction de covariance) et fréquentiel (densité spectrale). Il souligne l'équivalence entre les deux domaines dans le sens où le comportement de la fonction de covariance peut être traduit dans le domaine des fréquences. Ensuite, nous avons présenté différentes approches d'estimation de la densité spectrale d'un processus stationnaire en classant les estimateurs dans deux catégories : quadratique et non quadratique. Ainsi, nous savons construire des estimateurs non paramétriques (quadratiques) consistants sans imposer à priori une quelconque modélisation du processus étudié. Cependant, cette technique a ses limites. En effet, comme souvent dans les approches non paramétriques, la taille de l'échantillon est fondamentale et nous avons vu comment elle intervient dans l'expression de la variance des estimateurs. Autrement dit, il faut disposer d'un grand échantillon pour avoir un estimateur précis. Nous avons vu aussi que la précision de tels estimateurs était fortement liée au comportement local de la densité spectrale théorique. Ainsi, les variations brutales aux voisinages des pics peuvent augmenter

---

<sup>11</sup>Voir Brillinger et Krishnaniah (1983)

le biais de l'estimateur. Enfin, nous rappelons les problèmes classiques liés aux choix des fenêtres (arbitrage biais-variance, amplitudes des lobes, fuite spectrale, etc...). Tous ces inconvénients peuvent justifier l'utilisation des estimateurs quadratiques d'autant plus que les théorèmes d'approximations rationnelles de la densité spectrale justifient une telle démarche. La liste des méthodes d'estimation que nous avons présentées est loin d'être exhaustive. Il existe d'autres techniques soit moins bien connues soit très récentes<sup>12</sup>.

## 2 Processus non stationnaires

Nous avons présenté le concept de la densité spectrale d'un processus stationnaire sur le plan de la théorie et des techniques d'estimation. Les théorèmes de représentation constituent les fondements de la théorie spectrale que nous avons décrits jusqu'à présent. Mais, ces derniers reposent sur une hypothèse forte, c'est à dire, la stationnarité du moment d'ordre deux. Ne pas tenir compte de cette hypothèse rend possible la dépendance de la fonction de covariance du temps. Dès lors, les théorèmes de représentation perdent leurs sens puisqu'ils ne prennent pas en considération la dépendance temporelle. Alors, plusieurs définitions d'une densité spectrale évoluant avec le temps sont proposées dans la littérature comme nous le verrons dans les prochains paragraphes mais aucune d'entre elles ne semble satisfaire toutes les propriétés connues d'une densité spectrale issue d'un processus stationnaire.

### 2.1 Les propriétés d'un spectre évolutif

Nous nous plaçons dans le cadre d'un processus non stationnaire  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  ayant pour fonction de covariance  $R(t, s) = E(X_t \overline{X_s})$  et pour lequel on souhaite définir un

---

<sup>12</sup>Par exemple, l'utilisation des données taillées, la correction des biais des estimateurs par bootstrap, l'adaptation des estimateurs aux données manquantes, etc...

spectre évolutif  $h_t(\omega)$  (fonction de distribution spectrale ou densité sauf indication contraire), c'est à dire dépendant à la fois du temps et des fréquences. Notons au passage que toute fonction  $R(t, s)$  à deux variables est une fonction de covariance d'un processus stochastique si et seulement si  $R(t, s)$  est définie positive, i.e., pour tout ensemble finis d'entiers  $\{t_i\}$  et de complexes  $\{z_j\}$ , on a :

$$\sum_i \sum_j z_i \bar{z}_j R(t_i, t_j) \geq 0 \quad (3.52)$$

Dans le cas stationnaire, on retrouve le théorème d'Herglotz. Par ailleurs, les listes des propriétés A et B présentées dans les paragraphes ci-dessus sont énoncées dans le cadre général des processus continus  $X_t$ . Cependant, selon Loynes (1968), elles sont également valables dans le cas discret.

### 2.1.1 Propriétés descriptives pour un spectre évolutif

**Propriété  $A_1$  :** *Le spectre est une fonction à valeurs réelles des paramètres temps  $t$  et fréquences  $\omega$  et elle est complètement déterminée par la fonction de covariance de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  qui dépend du temps puisqu'il n'est pas stationnaire.*

**Propriété  $A_2$  :** *Le spectre évolutif décrit une distribution d'énergie en fonction des fréquences  $\omega$ .*

Cette propriété semble particulièrement attractive pour diverses applications et elle peut être interprétée au moins de deux manières : soit comme une relation de décomposition spectrale de la série [plus proche du théorème 2], soit comme une relation de décomposition spectrale de la variance instantanée (plus proche du théorème d'Herglotz) montrant la contribution de chaque fréquence  $\omega$  dans l'énergie totale de la série. Dans le cas stationnaire, les deux interprétations sont équivalentes.

**Propriété  $A_3$  :** *Lorsqu'on applique un filtre linéaire au processus  $X_t$ , alors le*

spectre évolutif du processus résultant  $Y_t$  s'exprime "raisonnablement et simplement" à l'aide de la densité spectrale de  $X_t$ .

Cette propriété est aussi à rapprocher du cas stationnaire. En effet, nous savons dans ce cas que la densité spectrale de  $Y_t$  est le produit de la densité spectrale de  $X_t$  par le carré du gain du filtre appliqué. Les propriétés  $A_2$  et  $A_3$  semblent particulièrement importantes dans le sens où  $A_2$  décrit ce qu'est la densité spectrale et  $A_3$  montre ce qu'elle devient dans le cas d'une transformation linéaire.

**Propriété  $A_4$  :** *La relation entre les spectres évolutifs et les fonctions de covariance sont "une à une"; Autrement dit, il existe une bijection entre la classe des spectres évolutifs et la classe des fonctions de covariance.*

Cette propriété n'est pas essentielle mais elle permet de limiter les pertes d'informations lorsqu'on souhaite passer de la fonction de covariance à la densité spectrale.

**Propriété  $A_5$  :** *Le spectre évolutif est réduit à celui du cas stationnaire lorsque  $X_t$  est stationnaire.*

C'est sans doute une des propriétés essentielles. Elle est au fondement des tests de stationnarité basés sur la densité spectrale évolutive. Nous retrouverons cette propriété plus tard pour présenter notre test de stationnarité.

**Propriété  $A_6$  :** *Si le processus  $X_t$  est composé de plusieurs parties stationnaires, disons par exemple que  $X_t = I(t \leq 0)X_t^{(1)} + I(t > 0)X_t^{(2)}$  où les composantes  $X_t^{(1)}$  et  $X_t^{(2)}$  sont stationnaires et  $I(\cdot)$  la fonction indicatrice, alors le spectre évolutif de  $X_t$  est composé des spectres évolutifs respectifs des parties stationnaires<sup>13</sup>.*

Cette propriété semble difficile à satisfaire de manière rigoureuse, puisqu'il n'existe probablement pas de façon stricte une densité spectrale instantanée focalisant

<sup>13</sup>Pour notre exemple, cela donne :  $h_t(\omega) = I(t \leq 0)h^{(1)}(\omega) + I(t > 0)h^{(2)}(\omega)$  où  $h^{(1)}(\omega)$  et  $h^{(2)}(\omega)$  désignent respectivement les spectres issues des cas stationnaires  $X_t^{(1)}$  et  $X_t^{(2)}$ .

exactement à un instant  $t$  donné les propriétés du processus étudié. Cependant, une version approximative de cette propriété peut être obtenue lorsqu'on examine  $h_t(\omega)$  pour un instant  $t$  situé dans un grand segment dans lequel la série peut être considérée comme approximativement stationnaire. Il est évident que la propriété  $A_5$  joue un rôle important dans la validité de  $A_6$ .

**Propriété  $A_7$  :** *Le spectre évolutif est estimable à partir d'une réalisation.*

Cette propriété soulève un certain nombre de questions. Comment obtenir des estimateurs consistants à partir d'une série ayant des caractéristiques statistiques variables avec le temps ? Nous verrons comment des auteurs tels que Priestley (1965) ou Dahlhaus (1996-1997) ont abordé cette question.

**Propriété  $A_8$  :** *Le spectre évolutif est la transformée de Fourier "d'une quantité apparemment sensée".*

Cette propriété est à rapprocher du cas stationnaire. En effet, nous savons que dans ce dernier cas que la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction de covariance qui a bien un sens. La propriété  $A_8$  est intéressante mais elle ne semble pas très importante. Cependant, on peut noter que si  $h_t(\omega)$  est positive, on peut toujours construire sa transformée de Fourier ou une transformée de Fourier-Stieltjes, mais rien ne garantit que ces quantités aient un sens, par exemple interprétable comme c'est le cas de la fonction de covariance. Plus précisément, la condition  $A_8$  suggère qu'on définisse au voisinage de chaque instant  $t_0$  une fonction de covariance stationnaire  $\varsigma_{t_0}(\tau) = R(t_0 + \tau, t_0)$  puis construire  $h_{t_0}(\omega)$  avec la transformée de Fourier de  $\varsigma_{t_0}(\tau)$ .

On peut envisager obtenir  $\varsigma_{t_0}(\tau)$  en employant une fonction de pondération  $K_{t_0}(s, t)$  comme suit :



$$\varsigma_{t_0}(\tau) = \int K_{t_0}(t + \tau, t)R(t + \tau, t)dt \quad (3.53)$$

Pour s'assurer de la convergence de cette expression, on peut considérer  $K_{t_0}(s, t)$  concentrée autour de  $t_0$ , i.e., décroissante rapidement vers zéro pour  $s$  et  $t$  éloignés de  $t_0$ . Cette approche de définition de la densité spectrale évolutive a été adoptée par un certain nombre d'auteurs.

Une deuxième liste alternative des propriétés souhaitables pour un spectre dépendant du temps, est également proposée par Loynes (1968). Certaines des propriétés proposées ressemblent à celles de la liste précédente alors que d'autres sont complètement inédites et nous procurent une certaine complémentarité avec les précédentes propriétés ci-dessus. Aussi, elles se distinguent des précédentes par le fait qu'elles sont plus formelles.

### 2.1.2 Propriétés formelles de la densité spectrale évolutive :

**Propriété  $B_1$  :** *Le spectre  $h_t(\omega)$  est une fonction à valeurs réelles des paramètres temps  $t$  et fréquences  $\omega$  et il est complètement déterminé par la fonction de covariance de  $X_t$  qui dépend du temps puisqu'il y a non stationnarité. Si  $h_t(\omega)$  désigne la fonction de distribution spectrale, on pourra exiger qu'elle tende vers une limite finie ou vers zéro selon que  $\omega$  tend respectivement vers plus l'infini ou vers moins l'infini. Si  $h_t(\omega)$  désigne la densité spectrale, alors  $\int h_t(\omega)d\omega$  doit être finie.*

La différence entre la propriété  $B_1$  avec la propriété  $A_1$  est quasi inexistante à l'exception que pour  $B_1$ , on distingue les différentes conditions selon qu'on considère la densité ou la fonction cumulative.

**Propriété  $B_2$  :** *Le spectre  $h_t(\omega)$  est une transformation linéaire  $R(u, v)$  de la fonction de covariance de  $X_t$ .*

C'est une propriété connue aussi dans le cas stationnaire pour calculer la densité spectrale d'un processus qui s'écrit comme somme de deux termes aléatoires indépendants et stationnaires. La fonction de covariance est ainsi une somme de deux fonctions de covariance,  $R(u - v) = R^1(u - v) + R^2(u - v)$  et la densité spectrale est une transformation linéaire de  $R(u - v)$ .

Les propriétés  $B_3, B_4, B_5, B_6$  et  $B_7$  sont identiques respectivement aux propriétés  $A_3, A_4, A_5, A_6$  et  $A_7$ .

Outre les propriétés citées, nous présentons la propriété qui propose un cadre asymptotique dans la procédure d'estimation du spectre.

**Propriété  $B_8$  :** *Le spectre évolutif est estimable à partir d'une réalisation et dans un cadre asymptotique, c'est à dire dans le sens où l'augmentation de la taille de l'échantillon doit permettre d'améliorer la précision locale de l'estimateur du spectre évolutif.*

Les questions posées à propos de  $A_7$  sont particulièrement valables dans ce cas. D'autant plus que le cadre asymptotique est fortement lié à la notion de stationnarité du processus, or une telle hypothèse est relâchée ici.

**Propriété  $B_9$  :** *Le spectre  $h_t(\omega)$  est une fonction positive et elle est croissante avec  $\omega$  si  $h_t(\omega)$  représente la fonction de distribution spectrale.*

C'est une propriété qu'on trouve également dans le cas stationnaire.

**Propriété  $B_{10}$  :** *Si  $\omega_0$  est une fréquence particulière donnée et  $\{Y_t\}$  le processus défini par :  $Y_t = X_t e^{-\omega_0 t}$ , alors :  $h_t^{(Y)}(\omega) = h_t(\omega + \omega_0)$  où  $h_t^{(Y)}(\omega)$  et  $h_t(\omega)$  désignent respectivement les spectres des processus  $Y_t$  et  $X_t$ .*

Cette propriété est inspirée des comportements de la fonction exponentielle. En effet, en multipliant  $Y_t$  par  $e^{-i\omega t}$ , au même temps,  $X_t$  sera multiplié par  $e^{-i(\omega + \omega_0)t}$

dans le calcul de la transformée de Fourier de  $Y_t$ .

**Propriété  $B_{11}$  :** *Si  $h$  est un entier fixé et  $\{Y_t\}$  le processus défini par :  $Y_t = X_{t+h}$ , alors :  $h_t^{(Y)}(\omega) = h_{t+h}(\omega)$  où  $h_t^{(Y)}(\omega)$  et  $h_t(\omega)$  désignent respectivement les spectres des processus  $Y_t$  et  $X_t$ .*

Un changement d'origine de la série est suivi par le même changement d'origine du spectre évolutif dans la dimension temporelle.

**Propriété  $B_{12a}$  :** *Soit  $\{Y_t\}$  le processus défini par :  $Y_t = \overline{X}_{-t}$ , alors :  $h_t^{(Y)}(\omega) = h_{-t}(\omega)$  où  $h_t^{(Y)}(\omega)$  et  $h_t(\omega)$  désignent respectivement les spectres des processus  $Y_t$  et  $X_t$ .*

Cette propriété comme la propriété  $B_{10}$  provient aussi du comportement de la fonction  $e^{i\omega t}$ . En effet, changer le signe de  $t$  puis passer à la forme conjuguée laisse inchangé  $e^{i\omega t}$ , i.e.,  $\overline{e^{-i\omega t}} = e^{i\omega t}$ .

**Propriété  $B_{12b}$  :** *Soit  $\{Y_t\}$  le processus défini par :  $Y_t = X_{-t}$ , alors :  $h_t^{(Y)}(\omega) = h_{-t}(-\omega)$  où  $h_t^{(Y)}(\omega)$  et  $h_t(\omega)$  désignent respectivement les spectres des processus  $Y_t$  et  $X_t$ .*

**Propriété  $B_{12c}$  :** *Soit  $\{Y_t\}$  le processus défini par :  $Y_t = \overline{X}_t$ , alors :  $h_t^{(Y)}(\omega) = h_t(-\omega)$  où  $h_t^{(Y)}(\omega)$  et  $h_t(\omega)$  désignent respectivement les spectres des processus  $Y_t$  et  $X_t$ .*

**Propriété  $B_{13}$  :** *Si  $X_t$  est réel, alors :  $h_t(\omega) = h_t(-\omega)$  où  $h_t(\omega)$  désigne la densité spectrale de  $X_t$ .*

Il s'agit de la propriété de la symétrie du spectre qui est une propriété bien connue dans le cas stationnaire. On peut noter qu'il existe une certaine relation entre les propriétés  $B_{12a}$ ,  $B_{12b}$ ,  $B_{12c}$  et  $B_{13}$  dans la mesure où, d'une part, tout choix de deux propriétés parmi les trois ( $B_{12a}$ ,  $B_{12b}$ ,  $B_{12c}$ ) implique la troisième propriété,

d'autre part,  $B_{12b}$  implique  $B_{13}$ .

Propriété  $B_{14}$  :  $h_t(\omega)$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$ .

### 2.1.3 Les définitions des densités spectrales issues des processus non stationnaires

Nous présentons dans cette partie les différentes définitions de spectres issus des processus non stationnaires. La revue est loin d'être exhaustive. Nous retenons seulement les définitions très importantes. Notre présentation respectera chronologiquement l'ordre de parution des différentes définitions.

#### Densité spectrale avec un poids conditionnel : Page (1952)

L'énergie du processus à l'instant  $t$  est définie par :

$$|g(t, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^t X_u e^{-i\omega u} du \right|^2 \quad (3.54)$$

et la densité spectrale instantanée est définie par :

$$\frac{\partial |g(t, \omega)|^2}{\partial t} \quad (3.55)$$

Si on considère maintenant  $E(|g(t, \omega)|^2)$  au lieu de  $|g(t, \omega)|^2$ , c'est à dire, en faisant intervenir les covariances  $R(u, v) = E(X_t \overline{X_u})$  au lieu des  $X_t \overline{X_u}$  dans les expressions ci-dessus, alors la définition de la densité spectrale devient :

$$h_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varsigma(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.56)$$

où

$$\varsigma(t, \tau) = \begin{cases} R(t, t - \tau) & \text{si } \tau > 0 \\ R(t + \tau, t) & \text{si } \tau < 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Si la fonction  $h_t(\omega)$  existe, alors elle détermine la fonction de covariance de  $X_t$  de manière unique :

$$\zeta(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} h_t(\omega) d\omega \quad (3.58)$$

et en particulier, on obtient une décomposition de la variance instantanée :

$$E \{ |X_t|^2 \} = R(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_t(\omega) d\omega \quad (3.59)$$

Selon Loynes (1968), l'approche de Page satisfait les propriétés  $A_4$ ,  $A_5$  et  $A_8$ .  $A_2$  est satisfaite dans un certain sens. Pour la liste  $B$  :  $B_2$ ,  $B_4$ ,  $B_5$ ,  $B_{10}$  et  $B_{11}$  sont satisfaites alors que  $B_9$  et  $B_{12a}$  ne le sont pas.

### Densité spectrale avec un poids moyen : Levin (1964)

L'approche de Levin (1964) est assez proche de celle de Page (1952). La densité spectrale évolutive  $h_t(\omega)$  a la forme suivante :

$$h_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.60)$$

mais cette fois, la fonction  $\zeta(t, \tau)$  n'est pas exactement comme dans (3.58). Elle s'exprime comme suit :

$$\zeta(t, \tau) = \frac{1}{2} \{ R(t + \tau, t) + R(t, t - \tau) \} \quad (3.61)$$

À part les propriétés vérifiées dans la définition de Page, l'approche de Levin satisfait également la propriété  $B_{12a}$ . L'approche de Levin est obtenue en examinant la valeur moyenne des deux intégrales  $\left| \int_{-\infty}^t X_u e^{-i\omega u} du \right|^2$  et  $\left| \int_t^{+\infty} X_u e^{-i\omega u} du \right|^2$ , alors que Page considère seulement  $\left| \int_{-\infty}^t X_u e^{-i\omega u} du \right|^2$ .

**Densité spectrale fondée sur une transformée de Fourier avec transmission indirecte : Dubman (1965)**

La densité spectrale évolutive  $h_t(\omega)$  proposée par Dubman (1965) est la transformée de Fourier d'une fonction de covariance locale  $R_t(\tau)$  au voisinage de  $t$  :

$$h_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega\tau} R_t(\tau) d\tau \quad (3.62)$$

La fonction  $R_t(\tau)$  devant satisfaire deux conditions : (i) Si la série temporelle est stationnaire, alors la fonction  $R_t(\tau)$  doit correspondre à la covariance du cas stationnaire  $R(\tau)$ . (ii) Dans tous les cas  $R_t(0) = E |X_t|^2$ . Il est évident que cette définition englobe plusieurs autres définitions et en particulier celle de Page. Par conséquent, nous retrouvons la même validité des propriétés que dans celle de l'approche de Page. Un des choix considérés par Dubman pour  $R(\tau)$  est :

$$R_t(\tau) = R(t + \tau/2, t - \tau/2) \quad (3.63)$$

et  $h_t(\omega)$  vérifie cette fois la condition  $B_{12a}$ .

**Densité spectrale fondée sur une transformée de Fourier avec transmission directe : Priestley (1965)**

Nous présentons dans cette partie l'approche de Priestley dans le cas d'un processus continu tel qu'elle a été introduite pour la première fois, sachant que la présentation s'adapte sans problème au cas discret<sup>14</sup>. Alors que l'approche de Dubman (1965), parmi d'autres que nous venons de citer, nécessite au préalable quelques opérations au niveau de la fonction de covariance (3.63) avant de définir la densité spectrale par transformée de Fourier, Priestley (1965) a une démarche nettement

---

<sup>14</sup>Dans le cas discret les bornes des intégrales sont généralement  $-\pi$  et  $\pi$  au lieu de  $-\infty$  et  $\infty$  dans le cas continu.

différente dans le sens où la fonction de covariance  $R$  du processus étudié doit être conforme à une représentation de la forme suivante :

$$E(X_t \overline{X_u}) = R(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} A_u(\omega) \overline{A_v(\omega)} e^{i\omega(u-v)} d\mu(\omega) \quad (3.64)$$

avec  $\mu$  une mesure et les conditions suivantes sur la fonction  $A_t(\omega)$  :

(i)  $A_0(\omega) = 1,$

(ii) La fonction  $|dH\omega(\theta)|$  doit être maximale pour  $\theta = 0$  où  $dH\omega(\theta)$  est la fonction qui vérifie :

$$A_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dH_\omega(\theta), \quad (3.65)$$

pour chaque  $\omega$ . C'est à dire que  $dH\omega(\theta)$  est la transformée de Fourier de  $A_t(\omega)$  en tant que fonction de  $t$ .

Pour une famille donnée de fonction  $\{A_t(\omega)\}$ , on définit la quantité  $B$  suivante :

$$B = [\sup_{\omega} B(\omega)]^{-1} \quad (3.66)$$

où,

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dH_\omega(\theta)| \quad (3.67)$$

Le processus  $X_t$  est dit *oscillatoire* et *semi-stationnaire* selon Priestley, s'il existe une famille de fonctions pour laquelle  $B$  est non nulle et qui permet la représentation (3.64). Étant donné un processus semi-stationnaire  $X_t$ , si plusieurs familles existent et sont contenues dans un ensemble  $\check{C}$ , alors on choisira si possible la famille de fonctions qui maximise les  $B$  (avec  $\in \check{C}$ ) et la quantité  $B_X = \sup_{\in \check{C}}(B)$  représente

selon Priestley l'intervalle maximal à travers lequel le processus peut être considéré comme approximativement stationnaire. Pour une telle famille, le spectre  $H_t(\omega)$  à l'instant  $t$  et à la fréquence  $\omega$  est défini comme suit :

$$dH_t(\omega) = |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega) \quad (3.68)$$

Si  $H_t(\omega)$  est différentiable par rapport à  $\omega$ , alors la densité spectrale évolutive est définie de la façon suivante :

$$h_t(\omega) = \frac{\partial H_t(\omega)}{\partial \omega} \quad (3.69)$$

On peut vérifier que  $H_t(\omega)$  décompose la variance et conserve une interprétation physique en terme de fréquence :

$$E |X_t|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dH_t(\omega) \quad (3.70)$$

et si  $H_t(\omega)$  est différentiable, cette expression peut aussi s'exprimer en fonction de la densité spectrale :

$$E |X_t|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_t(\omega) d\omega \quad (3.71)$$

On peut aussi vérifier que l'expression (3.64) est équivalente à la représentation suivante pour  $X_t$  :

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} A_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.72)$$

où  $\{Z(\omega)\}$  est un processus orthogonal avec :

$$E |dZ(\omega)|^2 = d\mu(\omega) \quad (3.73)$$



La priorité dans l'approche de Priestley est donnée à l'interprétation physique du spectre dans un sens très précis, à la fois en terme d'énergie et de fréquences. La condition (ii) est imposée pour forcer ce résultat. En effet, si  $A_t(\omega)$  (en tant que fonction de  $t$ ) avait une transformée de Fourier concentrée en une fréquence particulière  $\omega_0 \neq 0$ , il serait difficile dans l'expression du spectre  $dH_t(\omega) = |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega)$  de distinguer les effets de  $\omega_0$ . Ainsi, imposer la concentration de la transformée de Fourier de  $A_t(\omega)$  en zéro, permet de lever une telle ambiguïté. Cette condition donne aussi au processus  $X_t$  une caractéristique de stationnarité locale, puisque la fonction de transfert  $A_t(\omega)$  en vérifiant la condition (ii), empêche le processus  $X_t$  d'avoir des oscillations brusques (3.72). Il n'est pas difficile de construire un processus oscillatoire. Ainsi tout processus  $Y_t$  ayant la forme suivante est oscillatoire :

$$Y_t = C(t)X_t^{(0)} \quad (3.74)$$

avec  $C(t)$  une fonction réelle positive et  $X_t^{(0)}$  un processus stationnaire. Si  $dH^{X^0}(\omega)$  est le spectre de  $X_t^{(0)}$ , alors le spectre évolutif de  $Y_t$  est donné par  $dH_t^Y(\omega)$  :

$$dH_t^Y(\omega) = C(t)^2 dH^{X^0}(\omega) \quad (3.75)$$

Selon Loynes (1968), les propriétés  $A_3$  et  $A_4$  sont difficiles à vérifier. Les propriétés  $A_2$ ,  $A_5$  et  $A_7$  sont satisfaites.  $A_6$  est approximativement vraie et  $A_8$  semble non satisfaite. Pour la liste des propriétés  $B$ , les propriétés  $B_5$ ,  $B_7$ ,  $B_9$ ,  $B_{10}$ ,  $B_{11}$  et  $B_{12a}$  sont satisfaites. Cette approche a été étendue dans le cadre de la théorie des ondelettes par Priestley (1996). Il y a une autre interprétation intéressante de l'approche de Priestley (1996) en terme de filtre variant avec le temps. En effet, si on suppose que dans la représentation  $X_t = \int A_t(\omega)e^{i\omega t} dZ(\omega)$ , la fonction de transfert  $A_t(\omega)$  peut

s'écrire pour chaque  $t$  fixé sous la forme :

$$A_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h_t(u) du \quad (3.76)$$

alors la représentation (3.72) devient :

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} S_{t-u} h_t(u) du \quad (3.77)$$

où  $S_t$  est un processus stationnaire :

$$S_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.78)$$

Inversement, tout processus de la forme (3.77) [avec  $\{h_t(u)\}$  choisie de sorte que  $A_t(\omega)$  vérifie les conditions (i) et (ii)] peut être écrit sous la forme  $X_t = \int A_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega)$ . Ainsi, le processus oscillatoire  $X_t$  peut être interprété comme le résultat du passage d'un processus stationnaire  $\{S_t\}$  à travers un filtre  $\{h_t(u)\}$  variant avec le temps. La généralisation des processus oscillatoires dans le cas bivarié a été aussi proposée par Priestley & Tong (1973).

### Densité spectrale fondée sur la décomposition de Wold-Cramér : Tjostheim (1976) et de Mélard (1978)

Les deux auteurs Tjostheim (1976) et Mélard (1978) ont défini indépendamment un spectre évoluant avec le temps, basé sur la décomposition de Wold-Cramér du processus  $X_t$  :

$$X_t = \sum_{u=0}^{\infty} a_t(u) \varepsilon_{t-u} \quad \text{avec } \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.79)$$

disons  $\sigma^2 = 1$ . Une telle décomposition peut s'écrire sous la représentation suivante :

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.80)$$

avec

$$A_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{u=0}^{\infty} a_t(u) e^{-i\omega u}$$

et  $\{dZ(\omega)\}$  un processus orthogonal. La densité spectrale instantanée est définie comme suit :

$$h_t(\omega) = |A_t(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{u=0}^{\infty} a_t(u) e^{-i\omega u} \right|^2 \quad (3.81)$$

et

$$\text{var}(X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} h_t(\omega) d\omega \quad (3.82)$$

Selon Mélard qui a confronté  $h_t(\omega)$  aux propriétés de Loynes (1968), les propriétés  $A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12c}$  et  $B_{13}$  sont satisfaites alors que  $A_4, B_{12a}$  et  $B_{12b}$  ne le sont pas. La généralisation de l'approche de Mélard dans le cas bivarié a été également proposée par De Schutter-Herteleer (1977).

**Densité spectrale fondée sur les processus localement stationnaires : Dahlhaus (1996)**

Dahlhaus (1996) a proposé une densité spectrale dépendante du temps en définissant au préalable la notion de *processus localement stationnaire*, c'est à dire un processus  $\{X_{t,T}\}_{t=1\dots T}$  ayant la représentation suivante :

$$X_{t,T} = \mu\left(\frac{t}{T}\right) + \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda t) A_{t,T}^0(\lambda) d\xi(\lambda) \quad (3.83)$$

Avec les hypothèses (i) et (ii) ci-dessous :

(i)  $\xi(\lambda)$  un processus stochastique sur  $[-\pi, \pi]$  vérifiant :

$$(i_1) \overline{\xi(\lambda)} = \xi(-\lambda)$$

(i<sub>2</sub>) l'égalité suivante :

$$\text{cum} \{d\xi(\lambda_1) \dots d\xi(\lambda_k)\} = \eta \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \right) h_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) d\lambda_1 \dots d\lambda_k \quad (3.84)$$

où  $\text{cum} \{ \dots \}$  désigne le cumulatif d'ordre  $k$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2(\lambda) = 1$ ,  $|h_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})| \leq C_k$  pour tout  $k$  ( $C_k$  est une constante dépendante de  $k$ ) et  $\eta(\lambda) = \sum_{j=1}^k \delta(\lambda + 2\pi j)$  un développement de période  $2\pi$  de la fonction de Dirac  $\delta$ .

(ii) On suppose qu'il existe une constante  $K$  et une fonction  $2\pi$ -périodique  $A$  :

$[0, 1] \times R \mapsto \mathbb{C}$  vérifiant :

$$(ii_1) A(u, -\lambda) = \overline{A(u, \lambda)}$$

$$(ii_2) \sup_{t, \lambda} |A_{t, T}^0(\lambda) - A(\frac{t}{T}, \lambda)| \leq \frac{K}{T}$$

avec  $A(u, \lambda)$  et  $\mu(u)$  des fonctions supposées continues par rapport à  $u$ . Cette continuité de  $A(u, \lambda)$  par rapport à  $u$  garantit, selon Dahlhaus, un comportement de stationnarité locale du processus. La densité spectrale dépendante du temps est définie par :

$$h_u(\omega) = |A(u, \omega)|^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{t}{T} \quad (3.85)$$

L'objectif recherché par Dahlhaus dans une telle représentation est l'obtention d'un outil asymptotique. En effet, on remarquera que contrairement aux approches présentées jusqu'à présent, la variable considérée ici est  $u = \frac{t}{T}$  au lieu de  $t$ . Selon Dahlhaus, un tel choix permet d'obtenir de plus en plus d'informations locales lorsque la taille de l'échantillon  $T$  tend vers l'infini. Alors qu'il serait absurde de vouloir rechercher des résultats asymptotiques en travaillant avec  $t$  puisque les renseignements obtenus

en faisant tendre  $T$  vers l'infini n'auraient forcément pas de rapport avec l'observation actuelle de la série sur l'intervalle  $\{t = 1, \dots, T\}$  dans la mesure où il n'y a pas stationnarité<sup>15</sup>. Il n'est pas difficile de fabriquer un processus localement stationnaire comme le montrent les exemples suivants : supposons que  $Y_t$  est stationnaire et  $\mu, \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fonctions continues, alors le processus  $X_{t,T}$  suivant est localement stationnaire :

$$X_{t,T} = \mu \left( \frac{t}{T} \right) + \sigma \left( \frac{t}{T} \right) Y_t \quad (3.86)$$

Dans cet exemple, les fonctions  $A_{t,T}^0(\lambda)$  et  $A(\frac{t}{T}, \lambda)$  coïncident,  $A_{t,T}^0(\lambda) = A(\frac{t}{T}, \lambda)$ . Si  $Y_t$  est un  $AR(2)$  avec des racines complexes proches du cercle unitaire, alors  $Y_t$  montre un comportement périodique et la fonction  $\sigma$  peut être regardée comme l'amplitude variant avec le temps du processus  $X_{t,T}$ . Quand  $T$  tend vers l'infini alors de plus en plus de cycles du processus avec une amplitude proche de  $\sigma(u_0)$  sont observés dans l'intervalle  $u = \frac{t}{T} \in [u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$ .

Un autre exemple de processus localement stationnaire concerne les modèles autorégressifs avec coefficients variables avec le temps,

$$\sum_{j=0}^p a_j \left( \frac{t}{T} \right) X_{t-j,T} = \sum_{j=0}^q b_j \left( \frac{t}{T} \right) \sigma \left( \frac{t-j}{T} \right) \varepsilon_{t-j} \quad (3.87)$$

où  $\varepsilon_t$  est *iid* avec  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $var(\varepsilon_t) = 1$  et  $a_0(u) = b_0(0) = 1$ . La densité spectrale dépendante du temps d'un tel processus est :

$$h_u(\omega) = \left( \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \right) \frac{\left| \sum_{j=0}^q b_j(u) e^{i\omega j} \right|^2}{\left| \sum_{j=0}^p a_j(u) e^{i\omega j} \right|^2} \quad (3.88)$$

<sup>15</sup>En effet, les caractéristiques statistiques changent avec le temps dans le cas non stationnaire.

Dans cet exemple,  $A(\frac{t}{T}, \lambda)$  n'est pas exactement égale à  $A_{t,T}^0(\lambda)$  comme dans le cas précédent, mais plutôt une approximation comme dans la définition. Un des aspects asymptotiques de l'approche de Dahlhaus est interprété par le résultat suivant :

**Théorème de Dahlhaus (1996)**

Si  $X_{t,T}$  est localement stationnaire tel que  $A(u, \lambda)$ , alors il existe une fonction Lipschitzienne uniformément continue avec un coefficient  $\alpha > \frac{1}{2}$  et  $A_{t,T}^0(\lambda) = A(0, \lambda)$  si  $t < 1$  et  $A_{t,T}^0(\lambda) = A(1, \lambda)$  si  $t < T$ . Alors, pour tout  $u = \frac{t}{T} \in (0, 1)$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_{u,T}(\omega) - h_u(\omega)|^2 d\omega = o(1) \quad (3.89)$$

où

$$f_{u,T}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R(uT - s/2, uT + s/2) e^{-i\omega s}$$

et  $h_u(\omega)$  la vraie densité spectrale évolutive, c'est à dire que  $h_u(\omega) = |A(u, \omega)|^2$  et  $R$  la fonction de covariance, autrement dit,  $\lim_{T \rightarrow \infty} f_{u,T}(\omega) = h_u(\omega)$ .

Par ailleurs, il est montré que :

$$R(t, t+k) = \text{cov}(X_{[uT],T}, X_{[uT]+k,T}) = \int_{-\pi}^{\pi} h_u(\omega) e^{i\omega k} d\omega + O(T^{-1}) \quad (3.90)$$

en particulier :

$$\text{var}(X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} h_u(\omega) d\omega + O(T^{-1}) \quad (3.91)$$

où  $u = \frac{t}{T}$ .

L'approche de Dahlhaus semble appartenir à deux catégories : dans un sens, elle paraît un cas particulier de la représentation de Priestley (1965). Par conséquent,

les propriétés vérifiées dans le cas de Priestley semblent approximativement vérifiées dans ce cas ci. Néanmoins, l'interprétation physique au sens de Priestley doit être prise avec précaution dans l'approche de Dahlhaus, puisque rien ne garantit que le module de la transformée de Fourier de  $A(u, \omega)$  comme fonction de  $u$ , soit maximum en zéro (condition (ii) dans l'approche de Priestley). Dans un autre cas, si on considère  $f_{u,T}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R(uT - s/2, uT + s/2) e^{-i\omega s}$  comme définition approximative de la densité spectrale évolutive, comme l'indique le théorème ci-dessus, alors l'approche de Dahlhaus paraît un cas particulier de la définition de Dubman (1965) avec les défauts et les inconvénients. Dans tous les cas, la particularité de la définition de Dahlhaus est d'avoir réussi à impliquer une approche asymptotique (propriété  $\boxed{B'_d}$ ).

**Densité spectrale fondée sur les processus localement stationnaires par morceaux : Adak (1998)**

Adak (1998) a introduit la notion de processus *localement stationnaire par morceaux* à partir de laquelle il a proposé la définition d'une densité spectrale dépendante du temps.

**Définition 1**

Un processus stochastique  $X_{t,T}$  ( $t = 1, \dots, T$ ) avec  $E(X_{t,T}) = 0$  est localement stationnaire au point  $u \in [0, 1]$ , s'il existe une représentation :

$$X_{t,T} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A_{t,T}^0(\lambda) e^{i2\pi\lambda t} dZ(\lambda) \quad (3.92)$$

où

(a) avec  $\{Z(\lambda)\}$  un processus orthogonal.

(b) Il existe des constantes  $K \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et une fonction  $A : [0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \mapsto \mathbb{C}$  avec  $A(u, \lambda) = \overline{A(u, -\lambda)}$  telle que pour tout  $T :$

$$\max_{t: (\frac{t}{T}) \in I_{T,u}} \left( \sup_{\lambda} |A_{t,T}^0(\lambda) - A(u, \lambda)| \right) \leq KT^{-\alpha} \tag{3.93}$$

avec  $I_{T,u} = [u - T^{-\alpha}, u + T^{-\alpha}]$ , un intervalle centré en  $u$ .

Autrement dit, il existe un intervalle centré sur  $u = \frac{t}{T}$  sur lequel la définition de Dahlhaus s'applique. La densité spectrale au point  $u = \frac{t}{T}$  est définie par :

$$h_u(\omega) = |A(u, \omega)|^2 \tag{3.94}$$

**Définition 2**

Un processus est localement stationnaire par morceaux, s'il est stationnaire en tout point  $u = \frac{t}{T} \in [0, 1]$  sauf peut être en un nombre fini de points.

Les processus localement stationnaires de Dahlhaus (1997) sont des cas particuliers des processus localement stationnaires par morceau d'Adak (1998) à condition que  $A(u, \lambda)$  soit différentiable par rapport à  $u$  et  $\lambda$  avec des dérivées uniformément bornées. Les processus stationnaires par morceaux, les modèles *AR* à coefficients variables (sous certaines conditions) avec le temps et les processus à amplitude modulée, sont également des cas particuliers de l'approche d'Adak. La propriété importante de l'approche d'Adak est décrite par le théorème suivant :

**Théorème d'Adak (1998)**

Considérons la classe  $\aleph$  des processus stationnaires par morceaux suivante :

$$\aleph = \{Y_{t,N}\}_{t=1}^N, N \geq 1 \text{ avec } \forall t = 1, \dots, N; Y_{t,N} = \sum_{j=0}^{J-1} Y_t^{(j)} I(u_j \leq \frac{t}{N} \leq u_{j+1}), \tag{3.95}$$



et avec aussi,  $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_J = 1$  et chaque bloc  $Y_t^{(j)}$  est un processus stationnaire ayant  $f^{(j)}(\omega)$  pour densité spectrale. On suppose que :  $\frac{J}{N} \rightarrow \infty$  quand  $N \rightarrow \infty$ .  $I(\cdot)$  étant la fonction indicatrice.

Alors pour tout processus  $\{X_{t,N}\}_{t=1}^N$  localement stationnaire par morceaux au sens d'Adak, il existe un processus stationnaire par morceaux,  $\{Y_{t,N}\}_{t=1}^N \in \mathfrak{N}$ , tel que :

$$\frac{1}{N} E(X_{t,N} - Y_{t,N}) = O(N^{-2\alpha}) \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \quad (3.96)$$

Autrement dit, tout processus localement stationnaire par morceaux au sens d'Adak, peut toujours être considéré comme étant approximativement stationnaire par morceau. Une telle propriété est pratique dans l'étude de la densité spectrale évolutive, puisqu'il suffit de connaître le spectre dans chaque bloc de stationnarité (voir la propriété  $A_6$ ). C'est à dire que la densité spectrale évolutive de  $X_{t,N}$  est approximativement constante par morceaux par rapport au temps. Ainsi, si  $h_u(\omega)$  désigne la densité spectrale temps-fréquence de  $X_{t,N}$  et que  $\{Y_{t,N}\}_{t=1}^N \in \mathfrak{N}$  est une approximation de  $X_{t,N}$ , alors :

$$h_u(\omega) \approx \sum_{j=0}^{J-1} f_u^{(j)}(\omega) I(u_j \leq u = \frac{t}{N} \leq u_{j+1}) \quad (3.97)$$

### Densité spectrale fondée sur les processus bivariés : Ombao, Sachs et Guo (2002)

Ombao, Sachs & Guo (2002) ont proposé une procédure automatique pour estimer le spectre évolutif d'un processus bivarié. Leur méthode utilise une base de fonction SLEX (*Smooth Localized Complex Exponential basis*) au lieu de la base exponentielle classique. Ces auteurs ont étendu leur approche, en introduisant le mod-

èle SLEX localement stationnaire à partir duquel un spectre dépendant du temps est défini. Le modèle SLEX proposé apparaît comme la succession de plusieurs blocs de processus stationnaires et le spectre évolutif qui en résulte est une fonction constante par morceau (constante par rapport au temps). La base orthogonale de la fonction SLEX (dans  $L_2(R)$ ) utilisée par les auteurs possède la forme suivante :

$$\phi_\omega(t) = \Psi_+(t) \exp(i2\pi\omega t) + \Psi_-(t) \exp(-i2\pi\omega t) \quad (3.98)$$

où  $\Psi_+(t)$  et  $\Psi_-(t)$  sont deux fonctions de lissages telles que  $\Psi_+(t) + \Psi_-(t) = 1$ . Le support de  $\phi_\omega(t)$  est un intervalle de la forme  $[-\eta, 1 + \eta]$  où  $0 < \eta < 0.5$ . Une base vectorielle SLEX dans un bloc  $S$  de taille  $|S|$  ( $S$  est constitué d'une partie de la série) est un ensemble  $\{\phi_{S,\omega_k}(t)\}$  de la forme suivante :

$$\phi_{S,\omega_k}(t) = \phi_{\omega_k}\left(\frac{t - \alpha_0}{|S|}\right) \quad \text{où} \quad \omega_k = \frac{k}{|S|} \quad \text{et} \quad k = -\frac{|S|}{2} + 1, \dots, \frac{|S|}{2} \quad (3.99)$$

et  $\alpha_0$  est un entier qui caractérise le support  $\tilde{S}$  de  $\phi_\omega(t)$  dans le bloc  $S$ . La base  $\{\phi_{S,\omega_k}(t)\}$  dans le bloc  $S$  possède les propriétés suivantes : (i) Les parties réelles et imaginaires de  $\phi_{S,\omega_k}(t)$  sont orthogonales, (ii)  $\phi_{S,\omega_k}(t)$  est orthogonale à sa conjuguée, (iii) Pour toutes fréquences  $\omega_k \neq \omega_{k'}$ , les fonctions  $\phi_{S,\omega_k}(t)$  et  $\phi_{S,\omega_{k'}}(t)$  sont orthogonales. Le calcul de la transformée SLEX (par analogie à la transformée de Fourier qui utilise la base exponentielle sans lissage, i.e.,  $\{e^{i\omega t}\}$ ) consiste à diviser au préalable la série temporelle de taille  $T = 2^k$  en plusieurs blocs. Pour tout entier  $j = 0, \dots, J_T$  (avec  $J_T \leq K - 1$ ), on définit les blocs  $S(j, b)$ ,  $b = 0, \dots, 2^j - 1$  de sorte que chaque bloc contienne  $|S(j, b)| = M_j = \frac{M}{2^j}$  éléments. L'entier  $J_T$  est choisi ici de manière optimale parmi tous les entiers  $J \leq K$ .  $J_T$  intervient sur les choix optimaux des caractéristiques des fenêtres utilisées lorsqu'on veut estimer la densité spectrale

évolutive de manière non paramétrique. Pour chaque bloc  $S_j = S(j, b)$  de support  $\tilde{S}_j$ , les coefficients SLEX sont définis comme suit :

$$\hat{\theta}_{S_j, k, T} = \frac{1}{\sqrt{|M_j|}} \sum_{t \in \tilde{S}_j} X_{t, T} \bar{\phi}_{S_j, \omega_k}(t), \omega_k = \frac{k}{|M_j|} \quad \text{et} \quad k = -\frac{|M_j|}{2} + 1, \dots, \frac{|M_j|}{2} \quad (3.100)$$

et le SLEX périodogramme est donné par :

$$\hat{\alpha}_{S_i, k_i, T} = \left| \hat{\theta}_{S_i, k_i, T} \right|^2 \quad (3.101)$$

L'ensemble de toutes les bases orthonormales de la forme  $\{\phi_{S, \omega_k}(t)\}$  constitue une librairie de base SLEX,  $\mathfrak{B}$ . Inversement, toute base  $B \in \mathfrak{B}$  définit une segmentation particulière. Supposons connue une base  $B_T$ . Ombao, Sachs & Guo (2002) ont adopté la notation suivante :

$$\cup_i S_i B_T$$

pour désigner une collection de blocs avec  $S_i$  résultant d'une segmentation [i.e.,  $S_i$  est de la forme  $S(j, b)$ ] où  $S_i \in B_T$ . Notons finalement qu'aucun bloc appartenant à  $\cup_i S_i$  n'est un sous ensemble d'un autre bloc appartenant à  $\cup_i S_i$ . Il est maintenant possible d'introduire les processus  $\{X_{t, T}\}$  avec  $E(X_{t, T}) = 0$  ayant la représentation suivante :

$$X_{t, T} = \sum_{i: \cup S_i \sim B_T} \frac{1}{\sqrt{|M_i|}} \sum_{k_i = (-\frac{M_i}{2}) + 1}^{M_i/2} \theta_{S_i, k_i, T} \bar{\phi}_{S_i, \omega_{k_i}}(t) z_{S_i, k_i} \quad (3.102)$$

où  $\cup S_i \sim B_T$  est une base donnée,  $\theta_{S_i, k_i, T}$  des complexes scalaires fixés avec  $|\theta_{S_i, k_i, T}|^2 > 0$ , les processus  $z_{S_i, k_i}$  sont tels que  $z_{S_i, k_i} = dZ(\frac{k_i}{M_i})$  avec  $dZ(\omega)$ ,  $\omega \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  un processus orthonormal et  $E(dZ(\omega)) = 0$ .

Le spectre empirique  $h_{u,T}(\omega)$  est défini, pour  $k_i = (-\frac{M_i}{2}) + 1, \dots, (\frac{M_i}{2})$  et pour  $u = \frac{t}{T} \in (0, 1)$  comme suit :

$$h_{u,T}(\omega) = \sum_{i: \cup S_i \sim B_T} |\theta_{S_i, k_i, T}|^2 I_{S_i}([uT]) \quad (3.103)$$

avec  $I_{S_i}$  une fonction indicatrice sur chaque bloc  $S_i$ .

Le spectre théorique  $h_u(\omega)$  est défini sous certaines conditions [voir Ombao et al. (2002)] comme suit, à partir du logarithme :

$$\log h_u(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \log h_{u,T}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \beta_{-1,0}(\omega) \varphi_{0,0}(u) + \sum_{l=0}^{J_T-1} \sum_{m=0}^{2^l-1} \beta_{l,m}(\omega) \Psi_{l,m}(u) \right) \quad (3.104)$$

avec  $\{\varphi_{0,0}\} \cup \{\Psi_{l,m}\}_{l \geq 0, m \geq 0}$  la base d'ondelettes de Haar sur  $L_2([0, 1])$ , c'est à dire que :  $\Psi_{l,m}(x) = 2^{l/2} \Psi(2^l x - m)$ ,  $\Psi(u)$  est la fonction d'onde de Haar,  $\varphi_{0,0}(x) = I_{[0,1]}(x)$ ,  $\beta_{-1,0}(\omega) = \int_0^1 \log h_u(\omega) \varphi_{0,0}(u) du$  et  $\beta_{l,m}(\omega) = \int_0^1 \log h_u(\omega) \Psi_{l,m}(u) du$ . Les conditions suivantes sont imposées pour s'assurer que l'expression (3.104) est bien définie.

**Condition 1 :**

$h_u(\omega)$  en tant que fonction de  $\omega \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  vérifie, uniformément en  $u$ , une condition de Hölder d'ordre  $\mu$  avec une constante  $L$  :

$$|h_u(\omega) - h_u(\omega^*)| \leq L |\omega - \omega^*|^\mu \text{ avec } L > 0 \text{ constante et } \mu \in ]0, 1] \quad (3.105)$$

**Condition 2 :**

On suppose qu'il existe une collection  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L} = \{I_{m,l} = [2^l m, 2^l(m+1)[; \quad l = 0, 1, \dots; m = 0, \dots, 2^l - 1\} \quad (3.106)$$

et un sous ensemble d'intervalles  $I_v = [u_v, u_{v+1}) \in \mathcal{L}$  tel que  $\cup I_v = [0, 1]$  avec  $h_u(\omega)$  en tant que fonction de  $u$  sur  $I_v$  vérifiant une condition de Hölder d'ordre  $s_v$  pour tout  $\omega$  :

$$|h_u(\omega) - h_{u^*}(\omega)| \leq L^v |u - u^*|^{S_v} \quad \text{avec } L^v > 0 \text{ constante, } S_v \in ]0, 1], \quad (3.107)$$

au point de transition  $u_v$  entre les deux intervalles  $I_{v-1}$  et  $I_v$  des possibilités d'avoir un nombre fini de sauts sont tolérées.

**Condition 3 :**

Si  $T = 2^K$  est la taille de l'échantillon étudié, on suppose que : lorsque  $K \rightarrow \infty$ , alors  $J_T$  est fixe ou bien  $J_T \rightarrow \infty$  de manière à ce que  $\left(\frac{2^{J_T}}{T}\right) \rightarrow \infty$ . De plus, on suppose que  $J_T \leq J_{2T}$ .

On peut remarquer que la fonction de transfert  $\theta_{S_i, k_i, T}$  est constante par rapport au temps dans chaque bloc  $S_i$ . Le spectre évolutif est donc une fonction constante par morceau dans le sens où sur chaque  $S_i$ , il ne dépend que de  $\omega$ . Le cadre asymptotique est également présent dans cette approche comme le montre la relation (3.104).

Une version légèrement différente des processus SLEX *localement stationnaires* a été également proposée par les mêmes auteurs (2001) sous forme :

$$X_t = \sum_{j=1}^M \int_0^1 A^S(\omega, \frac{t}{T}) \phi_j(\omega, t) dZ(\omega) \quad (3.108)$$

avec  $\phi_j(\omega, t)$  ayant la forme  $\phi_j(\omega, t) = \Psi_+^j(t) \exp(i2\pi\omega t) + \Psi_-^j(t) \exp(-i2\pi\omega t)$ ,  $M$  le nombre de blocs qui forment une partition de la série et  $Z(\omega)$  un processus

orthogonal. Le spectre évolutif résultant de ce modèle est naturellement :

$$h_u(\omega) = |A^S(\omega, u)|^2 \quad (3.109)$$

Contrairement à la définition (3.102), dans cette version, la fonction de transfert  $A^S(\omega, u)$  est supposée continue et dérivable par rapport aux deux variables temps et fréquence, alors que dans le cas précédent la fonction de transfert  $\theta_{S_i, k_i, T}$  est constante par morceaux et les fréquences considérées  $\omega_{k_i}$  sont discrètes dans le cas du spectre empirique. Enfin, une équivalence asymptotique (en moyenne quadratique) entre l'approche de Dahlhaus (1997) et le modèle SLEX localement stationnaire est établie par les auteurs Ombao et al. (2002). Cette équivalence implique l'approximation du spectre continu du modèle de Dahlhaus (1997) par le spectre constant par morceau (par rapport au temps) du modèle SLEX, ce qui justifie les approches d'estimations du spectre évolutif basées sur les algorithmes de segmentation.

## 2.2 Méthodes d'estimation de la densité spectrale évolutive

### 2.2.1 Approches non paramétriques

#### 2.2.1.1 L'approche de Priestley (1965-1996)

Considérons un échantillon  $\{X_t, t = 0, \dots, T\}$  supposé issu d'un processus oscillatoire et semi-stationnaire  $X_t$  [dans le sens de Priestley (1965)] pour lequel on souhaite estimer la densité spectrale évolutive théorique  $h_t(\omega)$  pour chaque  $t = 1, \dots, T$  et pour chaque fréquence  $\omega$ . La méthode proposée par Priestley (1965) est non paramétrique. Elle consiste au préalable à choisir un filtre  $\{g_u\}$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) Le filtre  $\{g_u\}$  est de carré intégrable et est normalisé :

$$2\pi \sum_{u \in \mathbb{Z}} |g_u|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1 \quad \text{avec} \quad \Gamma(\omega) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} g_u e^{-iu\omega} \quad (3.110)$$

(ii) La largeur du filtre  $\{g_u\}$ , définie par :

$$B_g = \sum_{u \in \mathbb{Z}} |u| |g_u|, \quad (3.111)$$

est finie et est nettement inférieure à l'intervalle maximal de stationnarité locale de  $X_t$ , c'est à dire que  $B_g \ll B_X$  (avec  $B_X$  désignant l'intervalle maximal de stationnarité locale) et que  $B_g \ll T$ ,  $T$  étant la taille de l'échantillon.

On construit à partir de  $\{g_u\}$  le périodogramme local  $|u_t(\omega_0)|^2$  au voisinage de  $t$  pour la fréquence  $\omega_0$ , avec :

$$u_t(\omega_0) = \sum_{u=t-T}^t g_u X_{t-u} e^{-i\omega_0(t-u)} \quad (3.112)$$

Il est montré par Priestley (1965) que :

$$E(|u_t(\omega_0)|^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^2 h_t(\omega + \omega_0) d\omega + O\left(\frac{B_g}{B_X}\right) \quad (3.113)$$

Ce résultat montre que si la densité spectrale théorique  $h_t(\omega)$  possède pour chaque  $t$ , une largeur de bande beaucoup plus grande que celle de  $|\Gamma(\omega)|^2$ , alors la relation (3.113) peut s'écrire de manière approximative comme suit :

$$E(|u_t(\omega_0)|^2) h_t(\omega_0) \quad (3.114)$$

où  $h_t(\omega_0)$  est la densité spectrale théorique en  $\omega_0$ . C'est à dire que le périodogramme local est, approximativement un estimateur sans biais. On remarquera que ce résultat est établi sous l'hypothèse que la série étudiée  $X_t$  présente des caractéristiques de stationnarité locale; C'est à dire que l'intervalle de stationnarité locale  $B_X$  est suffisamment grand par rapport au champ d'action du filtre  $\{g_u\}$ .

Cependant, comme dans le cas stationnaire, le périodogramme local n'est pas un estimateur consistant. Un deuxième filtre est appliqué pour réduire les fluctuations de  $|u_t(\omega_0)|^2$ . On choisit alors un deuxième filtre  $\{\omega_{T',v}\}$  dépendant du temps  $v$  mais aussi d'un paramètre  $T'$  et qui satisfait les conditions suivantes :

- (1)  $\omega_{T',v} \geq 0$  pour tout  $v$  et  $T'$ ,
- (2)  $\omega_{T',v}$  décroît vers zéro quand  $|v|$  tend vers l'infini et cela pour tout  $T'$ ,
- (3)  $\sum_{v \in \mathbb{Z}} \omega_{T',v} = 1$ , pour tout  $T'$ ,
- (4)  $\sum_{v \in \mathbb{Z}} |\omega_{T',v}|^2 < \infty$ , pour tout  $T'$ ,
- (5) il existe une constante  $C$  telle que :

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \left\{ T' \int_{-\pi}^{\pi} |W_{T'}(\lambda)|^2 d\lambda \right\} = C \quad \text{avec} \quad W_{T'}(\lambda) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} e^{-iv\lambda} \omega_{T',v} \quad (3.115)$$

Puis, on construit l'estimateur suivant :

$$\widehat{h}_t(\omega_0) = \sum_{v=t-T}^t \omega_{T',v} |u_{t-v}(\omega_0)|^2 \quad (3.116)$$

Les propriétés de  $\widehat{h}_t(\omega_0)$  sont également étudiées par Priestley (1965). En supposant que le paramètre  $T'$  est choisi de tel sorte que la largeur de la fenêtre  $\{\omega_{T',v}\}$  soit plus grande que celle du premier filtre  $\{g_u\}$  et qu'elle soit nettement plus petite que  $T$  (la taille de l'échantillon), alors :

$$E\left(\widehat{h}_t(\omega_0)\right) \approx \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}_t(\omega + \omega_0) |\Gamma(\omega)|^2 d\omega \quad (3.117)$$

avec,

$$\bar{h}_t(\omega_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \omega_{T',v} h_{t-v}(\omega) \quad (3.118)$$



Ainsi,  $\bar{h}_t(\omega)$  est une moyenne de  $h_t(\omega)$  au voisinage de  $t$  et par conséquent  $E\left(\widehat{h}_t(\omega_0)\right)$  est une forme de moyenne du spectre théorique  $h_t(\omega)$  à la fois autour du temps  $t$  et de la fréquence  $\omega_0$ . Si nous supposons que la densité spectrale théorique  $h_t(\omega)$  est suffisamment plate sur la zone de concentration de  $|\Gamma(\omega)|^2$ , alors :

$$E\left(\widehat{h}_t(\omega_0)\right) \approx \bar{h}_t(\omega_0) \quad (3.119)$$

Si on pousse à nouveau le même raisonnement sur la relation (3.118) en supposant que le spectre théorique [vu cette fois comme fonction de  $t$ ] est suffisamment plat dans la région de concentration de la fenêtre  $\{\omega_{T',v}\}$ , alors :

$$E\left(\widehat{h}_t(\omega_0)\right) \approx h_t(\omega_0) \quad (3.120)$$

C'est à dire que  $\widehat{h}_t(\omega_0)$  est approximativement sans biais. Pour une large valeur de  $T'$  [paramètre de la fenêtre  $\{\omega_{T',v}\}$ ], la variance de  $\widehat{h}_t(\omega_0)$  est donnée par :

$$\text{var}\left(\widehat{h}_t(\omega_0)\right) \approx T'^{-1} \left\{ (1 + \delta_{\{0,\pi\}\omega_0}) C \tilde{h}_t^2(\omega_0) \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \right\} \quad (3.121)$$

où la constante  $C$  est donnée par la condition (5),  $\delta_{\{0,\pi\}\omega_0} = 1$  si  $\omega_0 = 0$  ou si  $\omega_0 = \pi$  et  $\tilde{h}_t^2$  est donnée par :

$$\tilde{h}_t^2(\omega_0) = \frac{\sum_{v \in \mathbb{Z}} (\omega_{T',v})^2 h_{t-v}^2(\omega_0)}{\sum_{v \in \mathbb{Z}} (\omega_{T',v})^2} \quad (3.122)$$

Ainsi, le paramètre  $T'$  peut être utilisé pour contrôler la variance de  $\widehat{h}_t(\omega_0)$ . Par ailleurs,

$$\text{cov}\left(\widehat{h}_{t_1}(\omega_1), \widehat{h}_{t_2}(\omega_2)\right) \approx 0$$

si l'une au moins des deux conditions (i) ou (ii) suivantes est vérifiée :

(i) La quantité  $|\omega_1 \pm \omega_2|$  est largement supérieure à la largeur<sup>16</sup> de bande de  $|\Gamma(\omega)|^2$  ou

(ii) La quantité  $|t_1 - t_2|$  est largement supérieure à la largeur de bande de  $\{\omega_{T',v}\}$ .

Le comportement de l'estimateur  $\widehat{h}_t(\omega_0)$ , comme nous venons de le voir, est largement lié aux caractéristiques des fenêtres utilisées. Le résultat suivant montre aussi l'implication de la forme théorique de  $h_t(\omega_0)$  dans la qualité de  $\widehat{h}_t(\omega_0)$  :

$$E(\widehat{h}_t(\omega_0)) \approx h_t(\omega_0) \left\{ 1 + \frac{B_\omega^2}{2B_0^2(t, \omega_0)} + \frac{B_\Gamma^2}{2B_f^2(t, \omega_0)} \right\} \quad (3.123)$$

où

$$B_\omega = \left\{ \sum_{v \in \mathbb{Z}} v^2 \omega_{T',v} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad B_\Gamma = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 |\Gamma(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.124)$$

et

$$B_0(t, \omega) = \left| \frac{h_t(\omega)}{\partial^2 h_t(\omega) / \partial t^2} \right|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad B_f(t, \omega) = \left| \frac{h_t(\omega)}{\partial^2 h_t(\omega) / \partial \omega^2} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (3.125)$$

Les quantités  $B_\omega$  et  $B_\Gamma$  sont des grandeurs des fenêtres utilisées (largeurs des fenêtres) alors que  $B_0(t, \omega)$  et  $B_f(t, \omega)$  dépendent de la forme théorique de la densité spectrale évolutive  $h_t(\omega_0)$  qu'on cherche à estimer. À proximité des pics, la quantité  $B_f(t, \omega)$  est plus petite et par conséquent le biais est grand. De même,  $B_0(t, \omega)$  est petite (donc un biais augmenté) pour une série qui présente de nombreuses oscillations (problème de stationnarité locale). Le choix optimal des paramètres qui peuvent caractériser les fenêtres  $\{g_u\}$  et  $\{\omega_{T',v}\}$  [disons le paramètre  $T'$  pour  $\{\omega_{T',v}\}$

---

<sup>16</sup>Il n'existe pas une définition unique de la largeur de bande pour une fenêtre [voir Priestley (1981), pour les diverses définitions].

et le paramètre  $h$  pour  $\{g_u\}$  peut être obtenu en minimisant la quantité  $M(h, T')$  suivante, qui représente en fait l'erreur relative de l'estimateur  $\widehat{h}_t(\omega_0)$  :

$$M(h, T') \approx \frac{1}{4} \left( \frac{B_\omega^2}{B_0^2} + \frac{B_\Gamma^2}{B_f^2} \right) + \frac{C}{T'} \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \quad (3.126)$$

où  $C$  est la constante donnée par la condition (5) et :

$$B_0 = \inf_{\omega} \left\{ \inf_t (B_0(t, \omega)) \right\} \quad \text{et} \quad B_f = \inf_t \left\{ \inf_{\omega} (B_f(t, \omega)) \right\}$$

Pour minimiser l'expression (3.126), on peut fixer la fraction  $\frac{B_\Gamma}{B_f}$  égale à une valeur  $\lambda$  donnée. Dans ce cas, on dit qu'on a *fixé une résolution dans le domaine des fréquences*. Si c'est la fraction  $\frac{B_\omega}{B_0}$  qui est fixée égale à une valeur donnée  $\mu$ , on dit qu'on a *fixé une résolution dans le domaine des temps*.

Priestley (1996) a étudié la relation entre sa théorie du spectre évolutif et l'analyse des ondelettes tout en restant vigilant pour que la variable  $\omega$  conserve son interprétation physique. L'essentiel des résultats de ses investigations montre que l'utilisation de la théorie des ondelettes (avec une onde mère bien choisie) pour estimer le spectre évolutif est efficace pour les basses fréquences ou la fréquence nulle alors que ce n'est plus le cas pour les autres fréquences. Pour estimer le spectre évolutif d'un processus oscillatoire  $X_t$  en une fréquence particulière  $\omega_0$ , Priestley (1996) propose de faire au préalable une transformation de la série en  $X'_t = e^{-i\omega_0 t} X_t$ . On peut montrer alors que les spectres évolutifs de  $X'_t$  et  $X_t$  sont reliés par la relation suivante :

$$h'_t(\omega - \omega_0) = h_t(\omega) \quad (3.127)$$

où  $h'_t(\omega)$  et  $h_t(\omega)$  désignent respectivement les spectres de  $X'_t$  et  $X_t$ . Il suffit donc, si

on veut utiliser les ondelettes, d'estimer  $h'_t$  à proximité de la fréquence  $\omega_0$  pour avoir une estimation de  $h_t$  en  $\omega_0$ . Cela revient à étudier un estimateur de  $h'_t(\omega')$  pour  $\omega'$  proche de zéro ( $\omega' = \omega - \omega_0$ ), ce qui est idéal si on veut utiliser les ondelettes [selon Priestley (1996)].

### 2.2.1.2 L'approche de Dahlhaus (1996)

On s'intéresse ici au cas d'un échantillon  $\{X_{t,T}, t = 1, \dots, T\}$  provenant d'un processus localement stationnaire, et on souhaite estimer la densité spectrale évolutive  $h_u(\omega)$  en  $u = \frac{t}{T}$  et  $\omega$ . L'approche non paramétrique étudiée par Dahlhaus (1996) consiste à déterminer d'abord un périodogramme local  $I_N(u, \omega)$  calculé sur un segment de longueur  $N$  centré en  $[uT] = t$  :

$$I_N(u, \omega) = \frac{1}{2\pi H_N} \left| \sum_{s=1}^N h\left(\frac{s}{N}\right) X_{[uT] - \frac{N}{2} + s, T} e^{-i\omega s} \right|^2 \quad (3.128)$$

$H_N = \sum_{t=1}^N h\left(\frac{t}{N}\right)^2$  et  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $h(x) = h(1-x)$ , une fonction fenêtre donnée. Comme dans le cas stationnaire, le périodogramme  $I_N(u, \omega)$  n'est pas consistant. On procède alors à un lissage en fréquence. Pour cela on choisit une deuxième fenêtre :  $K_f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  avec  $K_f(x) = 0$  pour  $x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $K_f(x) = K_f(-x)$  et  $\int_{\mathbb{R}} K_f(x) dx = 1$ , puis on construit l'estimateur  $h_u(\omega)$  comme suit :

$$\widehat{h}_u(\omega) = \frac{1}{b_f} \int K_f\left(\frac{\omega - \lambda}{b_f}\right) I_N(u, \lambda) d\lambda \quad (3.129)$$

où  $b_f$  est une valeur représentant la largeur de bande dans la direction des fréquences (résolution en fréquences). Les propriétés asymptotiques de  $I_N(u, \omega)$  et  $\widehat{h}_u(\omega)$  sont présentées dans les théorèmes suivants.

#### **Théorème I de Dahlhaus (1996)**

Supposons que  $X_{t,T}$  est localement stationnaire avec  $\mu\left(\frac{t}{T}\right) \equiv 0$  et une fonction de transfert  $A(u, \omega)$  ayant des dérivées secondes  $\frac{\partial}{\partial u^2} A(u, \omega)$ ,  $\frac{\partial}{\partial u \partial \omega} A(u, \omega)$  continues.

Alors :

(i)

$$E(I_N(u, \omega)) = h_u(\omega) + \frac{1}{2} b_t^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 K_t(x) dx \frac{\partial^2}{\partial u^2} h_u(\omega) + o(b_t^2) + O\left(\frac{\log(b_t T)}{b_t T}\right) \quad (3.130)$$

(ii)

$$\begin{aligned} E(\widehat{h}_u(\omega)) &= h_u(\omega) + \frac{1}{2} b_t^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 K_t(x) dx \frac{\partial^2}{\partial u^2} h_u(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2} b_f^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 K_f(x) dx \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} h_u(\omega) + o(b_t^2 + \frac{\log(b_t T)}{b_t T} + b_f^2) \end{aligned} \quad (3.131)$$

(iii)

$$\text{var}(\widehat{h}_u(\omega)) = (b_t b_f T)^{-1} h_u^2(\omega) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_t^2(x) dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_f^2(x) dx \quad (3.132)$$

où,

$$K_t(x) = \left\{ \int_0^1 h^2(x) dx \right\}^{-1} h\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (3.133)$$

avec  $h$  la fenêtre utilisée pour le calcul de  $I_N(u, \omega)$ ,  $b_t = \frac{N}{T}$  ( $b_t$  représente la résolution dans le domaine temporel),  $h_u(\omega)$  est la densité spectrale évolutive théorique vue comme fonction des deux variables  $u$  et  $\omega$  avec  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} h_u(\omega)$  et  $\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} h_u(\omega)$  les dérivées secondes prises sur  $(u, \omega)$ . On peut noter, comme dans le cas de l'estimation non paramétrique de Priestley [relation (3.123)], que le premier terme du biais de  $\widehat{h}_u(\omega)$  est dû à la non stationnarité du processus (présence du facteur  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} h_u(\omega)$  qui est nul dans le cas stationnaire), alors que le second terme du biais est dû au comportement du spectre dans le domaine des fréquences  $\left(\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} h_u(\omega)\right)$ . Comme dans le cas précédent de Priestley, on peut déterminer les éléments optimaux des quantités  $K_t(x)$ ,  $K_f(x)$ ,

$b_t$  et  $b_f$  qui interviennent dans l'estimateur  $\widehat{h}_u(\omega)$ , en minimisant l'erreur relative  $er(\widehat{h}_u(\omega)) = E\left(\frac{\widehat{h}_u(\omega)}{h_u(\omega)} - 1\right)^2$ . On obtient alors les résultats suivants résumés par le théorème ci-dessous :

**Théorème II de Dahlhaus (1996)**

L'erreur relative  $er(\widehat{h}_u(\omega)) = E\left(\frac{\widehat{h}_u(\omega)}{h_u(\omega)} - 1\right)^2$  est minimale pour :

$$K_t^{opt}(x) = K_f^{opt}(x) = 6\left(\frac{1}{4} - x^2\right), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (3.134)$$

$$b_t^{opt} = T^{-\frac{1}{6}}(576\pi)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta_u^5}\right)^{\frac{1}{12}} \quad (3.135)$$

$$b_f^{opt} = T^{-\frac{1}{6}}(576\pi)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta_\lambda^5}\right)^{\frac{1}{12}} \quad (3.136)$$

d'où,

$$er(\widehat{h}_u^{opt}(\omega_0)) = \frac{3^{7/3}}{25}\pi^2 (\Delta_u \Delta_\lambda)^{\frac{1}{3}} T^{-2/3} \quad (3.137)$$

où  $T$  désigne la taille de l'échantillon et,

$$\Delta_u = \frac{\frac{\partial^2}{\partial u^2} h_u(\omega)}{h_u(\omega)} \quad \text{et} \quad \Delta_\lambda = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} h_u(\omega)}{h_u(\omega)}. \quad (3.138)$$

Il en résulte de  $K_t^{opt}(x)$  et  $K_f^{opt}(x)$  que l'expression optimale de la fenêtre  $h$  dans le calcul de  $I_N(u_0, \omega_0)$  soit :

$$h^{opt}(x) = (6x(1-x))^{1/2} \quad (3.139)$$

**2.2.1.3 L'approche d'Adak (1998)**

Nous avons vu que les processus localement stationnaires par morceaux d'Adak

pouvaient être approchés par des processus stationnaires par morceaux. Cela suggère que pour estimer la densité spectrale évolutive, on peut procéder à une segmentation au préalable du processus en plusieurs blocs approximativement stationnaires, puis utiliser la formule (3.97) pour une estimation de la densité spectrale évolutive. C'est cette approche qu'Adak (1998) a adoptée en proposant un algorithme de segmentation TASS (*Tree-based Adaptive Segmented Algorithm*). L'essentiel de cet algorithme consiste à subdiviser d'abord la série étudiée en plusieurs blocs qui peuvent s'emboîter les uns dans les autres. Puis pour chaque bloc, une estimation de la densité spectrale sera calculée. Enfin, un algorithme est utilisé pour recoller les segments adjacents pour lesquels les spectres se ressemblent. Le critère utilisé par Adak (1998) pour le choix de la bonne segmentation du processus étudié, consiste à trouver la subdivision optimale  $S^*$  parmi toutes les subdivisions dyadiques<sup>17</sup>  $S$  qui minimise la quantité suivante :

$$\sum_{segments \in S} distance(\hat{h}_{gauche}, \hat{h}_{droite}) \quad (3.140)$$

où  $\hat{h}_{gauche}$  et  $\hat{h}_{droite}$  désignent respectivement les estimations des densités spectrales du bloc de gauche et de droite pour les deux blocs adjacents. Nous préciserons ci-dessous les distances utilisées. Pour déterminer  $S^*$ , l'algorithme suivant est employé :

*Étape I* : Fixer  $D =$  la profondeur maximale de l'algorithme,

*Étape II* : Fixer  $m = \frac{N}{2^{D+1}}$  le nombre maximum de segments emboîtés, avec  $N$  désignant la taille de l'échantillon étudié.

*Étape III* : Pour chaque  $d = 0, \dots, D$ , diviser l'échantillon en  $2^d$  blocs : chacun des blocs  $B(b, d)$ ,  $b = 0, \dots, 2^d - 1$  emboîte le bloc adjacent à travers un nombre de

---

<sup>17</sup>C'est à dire que le nombre des blocs dont la puissance est de 2.

points égal à  $2m - 23$ ,

*Étape IV* : Pour  $d = 0, \dots, D$  et  $b = 0, \dots, 2^d - 1$ , calculer un estimateur  $\widehat{h}_{b,d}$  de la densité spectrale pour chaque bloc  $B(b, d)$

Pour  $d = D - 1$  à  $0$  (c'est à dire,  $D - 1 : -1 : 0$ )

*Étape V* : Calculer  $R_{b,d} = \text{distance}(\widehat{h}_{2b,d+1}, \widehat{h}_{2b+1,d+1})$  et fixer  $\text{valeur}(b, d) = R_{b,d}$ ,

*Étape VI* : Si  $d = D - 1$ , marquer le bloc  $B(b, d)$ , comme bloc terminal. Si  $d < D - 1$ , et si  $\text{valeur}(b, d) \leq \text{valeur}(2b, d+1)$ , alors marquer le bloc  $B(b, d)$  comme bloc terminal. Sinon ne pas marquer le bloc  $B(b, d)$  et fixer  $\text{valeur}(b, d) = \text{valeur}(2b, d+1) + \text{valeur}(2b+1, d+1)$ . La segmentation finale est l'ensemble  $S_{finale}$  {des blocs  $B(b, d)$  marqués sans que leurs ancêtres ne soient pas marqués} et l'estimation de la densité spectrale évolutive est :  $\left\{ \widehat{h}_{b,d} \text{ estimé sur } B(b, d) \in S_{finale} \right\}$ .

Jusqu'à maintenant, nous avons utilisé la notion de distance pour mesurer les contrastes des spectres entre les blocs. Les distances considérées par Adak (1998) sont les suivantes :

– Distance de Kolmogorov-Smirnov :

$$R_{b,d} = \frac{N}{2^d} \max_j \left| \widehat{F}_{2b,d+1}(\omega_j) - \widehat{F}_{2b+1,d+1}(\omega_j) \right| \quad (3.141)$$

où  $\widehat{F}_{b,d}(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\omega} \widehat{h}_{b,d}(\theta) d\theta$  et  $\omega_j = \frac{2\pi j 2^d}{2N}$ ,  $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^d} - 1$ ,

– Distance de Cramér-Von Mises :

$$R_{b,d} = \sqrt{\frac{N}{2^d}} \left\| \widehat{F}_{2b,d+1}(\omega_j) - \widehat{F}_{2b+1,d+1}(\omega_j) \right\|_{l_2} \quad (3.142)$$

– Distance calculée à partir d'une somme cumulative (*CuSum*) :



$$R_{b,d} = \frac{N}{2^d} \left[ \max_j \left| \frac{\sum_{k=0}^j Z_{b,d}(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2^{d+1}}-1} Z_{b,d}(\omega_k)} - \frac{j+1}{\frac{N}{2^{d+1}}} \right| \right] \quad (3.143)$$

où,

$$Z_{b,d}(\omega_k) = 1 + \log \left( \frac{\widehat{h}_{2b,d+1}(\omega_k)}{\widehat{h}_{2b+1,d+1}(\omega_k)} \right) \quad (3.144)$$

#### 2.2.1.4 L'approche d'Ombao et al. (2001-2002)

Soit  $\{X_{t,T}\}_{t=0}^{T-1}$  un processus SLEX *localement stationnaire*. Comme dans le cas stationnaire avec une base exponentielle  $\{e^{i\omega t}\}$ , une première approche pour estimer la densité spectrale évolutive SLEX,  $h_u(\omega)$  est de considérer le périodogramme SLEX,  $\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}$ . C'est un estimateur de la densité spectrale pour les points  $t \in S_i$  et à la fréquence  $\omega_{k_i} = \frac{k}{|S_i|}$  avec  $|S_i|$  désignant la taille du bloc  $S_i$ . Les propriétés asymptotiques de  $\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}$  sont résumées ci-dessous :

$$E(\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}) = h_u(\omega_{k_i}) \text{ avec } u \in (0, 1) \text{ et } [uT] \in S_i \quad (3.145)$$

Si on suppose en outre que le processus étudié est gaussien, alors les périodogrammes  $\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}$  sont indépendants et sont distribués suivant :

$$\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T} \begin{cases} \frac{h_u(\omega_{k_i}) \chi_2^2}{2} & \text{si } \omega_{k_i} \neq 0 \text{ et } 0.5 \\ h_u(\omega_{k_i}) \chi_1^2 & \text{si } \omega_{k_i} = 0 \text{ ou } 0.5 \end{cases} \text{ avec } [uT] \in S_i \quad (3.146)$$

Ainsi,  $\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}$  est un estimateur sans biais mais non consistant. Pour réduire les fluctuations, on peut avoir recours à une méthode classique qui consiste à lisser le périodogramme. Ainsi, étant donné un point  $u \in (0, 1)$ , pour estimer  $h_u(\omega)$ , on calcule d'abord le SLEX périodogramme  $\widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}$  sur un bloc  $S$  de taille  $M$  tel que  $[uT] \in S$ . Le lissage en fréquences prend alors la forme suivante :

$$\widehat{h}_u(\omega) = (Mb_f)^{-1} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{M/2} K_f\left(\frac{(\omega - \omega_k)}{b_f}\right) I_S(u, \omega_k) \quad (3.147)$$

avec  $I_S(u, \omega_k) = \widehat{\alpha}_{S_i, k_i, T}$ ,  $\omega_k = \frac{k}{M}$ ,  $K_f(\theta)$  une fonction fenêtre, paire, de support compact  $[-0.5, 0.5]$  avec  $\int K_f(\theta) d\theta = 1$ . On suppose en outre que la largeur de bande en fréquence  $b_f \rightarrow 0$  et  $Mb_f$  tend vers  $+\infty$  quand  $T$  tend vers  $\infty$ . En supposant que les conditions (1), (2) et (3) que nous avons déjà présentées soient vérifiées et en posant  $b_t = \frac{M}{T}$ , la largeur de bande dans la dimension temporelle, alors les propriétés asymptotiques de  $\widehat{h}_u(\omega)$  sont :

$$E(I_S(u, \omega_k)) = h_u(\omega_k) + O(b_t^s) \quad \text{pour } \omega_k \neq 0 \quad (3.148)$$

$$E(\widehat{h}_u(\omega)) = h_u(\omega_k) + O(b_t^s) + O(b_f^\mu) + O((Mb_f)^{-\mu}) \quad \text{pour } \omega_k \neq 0 \quad (3.149)$$

$$\text{var}(\widehat{h}_u(\omega)) = (b_f b_t T)^{-1} h_u^2(\omega) \int K^2(\theta) d\theta + O((b_f b_t T)^{-1}) \quad \text{pour } \omega_k \neq 0 \quad (3.150)$$

Pour des choix optimaux de  $b_f$  et de  $b_t$ , l'erreur relative de  $\widehat{h}_u(\omega)$  est :

$$E\left(\frac{\widehat{h}_u(\omega)}{h_u(\omega)} - 1\right)^2 = O\left(T^{\frac{-2\mu s}{\mu+s+2\mu s}}\right) \quad (3.151)$$

avec la valeur  $\mu$  donnée dans la condition (1), et  $s = \inf_v(s_v)$  avec  $s_v$  donné dans la condition (2). L'expression (3.150) montre que le taux de consistance est de l'ordre de  $(b_f b_t T)^{-1} = (b_f M)^{-\frac{1}{2}}$ . Ainsi, en fixant  $b_f^s = b_t^\mu = b$  (c'est à dire que le biais dans le domaine temporel est le même que dans le domaine des fréquences) ? on peut déterminer par exemple  $M$  la taille optimale du bloc sur lequel on calcule les

estimations. L'étude du spectre issu des modèles SLEX a été également étendue aux méthodes bootstrap par Ombao et al. (2002).

### 2.2.2 Méthodes d'estimation paramétrique

Nous avons vu que pour estimer la densité spectrale d'un processus stationnaire, on peut au préalable estimer un modèle ARMA ? puis utiliser les formules connues des densités spectrales issues de tels processus. Dans le cas non stationnaire, une méthode similaire consiste à estimer aussi un modèle autorégressif avec paramètres variant avec le temps, ensuite, utiliser les formules spécifiques donnant la densité spectrale évolutive. Parmi les moyens classiques d'estimations des modèles à coefficients variables avec le temps, on peut citer la mise en œuvre du filtre de Kalman. Rao (1970) a utilisé une méthode des moindres carrés pondérés pour l'estimation de tels modèles et Dahlhaus (1997) et Dahlhaus & Giratis (1998) ont étudié le problème en développant une théorie locale des relations de Yule-Walker. Soit un échantillon  $\{X_{t,T}\}_{t=1}^T$  issu d'un processus localement stationnaire (au sens de Dahlhaus) et ayant une densité spectrale théorique  $h_u(\omega)$  avec  $u = \frac{t}{T} \in (0, 1)$ . Supposons que  $\{X_{t,T}\}_{t=1}^T$  résulte réellement du modèle *AR* à coefficients variables, suivant :

$$\sum_{j=0}^p a_j(u) X_{t-j,T} = \sigma(u) \varepsilon_t \quad \text{avec } u = \frac{t}{T} \text{ et } t = 1, \dots, T \quad (3.152)$$

Ce modèle est un cas particulier de processus localement stationnaire au sens de Dahlhaus et la densité spectrale évolutive qui en résulte est :

$$h_{\theta(u),u}(\omega) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi \left| \sum_{j=0}^p a_j(u) e^{i\omega j} \right|^2} \quad (3.153)$$

où  $\theta(u) = (\sigma^2(u), a_1(u), \dots, a_p(u))'$  désigne l'ensemble des paramètres à estimer autour de chaque instant  $u = \frac{t}{T}$ . Le caractère de stationnarité locale de  $\{X_{t,T}\}_{t=1}^T$

suggère qu'on construise autour de chaque point  $u = \frac{t}{T}$  un intervalle de taille  $N$  et centré en  $[uT]$  (disons  $U_N = [uT] - \frac{N}{2} + 1, \dots, [uT] + \frac{N}{2}$ ) sur lequel on peut considérer que le processus est approximativement stationnaire, puis étudier un estimateur de  $\theta(u)$  sur cet intervalle. C'est l'approche adoptée par Dahlhaus (1997) et Dahlhaus & Giratis (1998). Notons par  $\hat{a}_{N,u} = (\hat{a}_N(u, 1), \dots, \hat{a}_N(u, p))'$  et  $\hat{\sigma}_{N,u}^2$  des estimateurs locaux de Yule-Walker calculés sur l'intervalle  $U_N = [uT] - \frac{N}{2} + 1, \dots, [uT] + \frac{N}{2}$ . Alors ces estimateurs sont déterminés de manière non-paramétrique par les relations suivantes [voir Dahlhaus & Giratis (1998)] :

$$\hat{a}_{N,u} = -\hat{R}_{N,u}^{-1} \hat{r}_u \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{N,u}^2 = \hat{c}_N(u, 0) + \hat{a}'_{N,u} \hat{r}_u \quad (3.154)$$

où  $\hat{r}_u = (\hat{c}_N(u, 1), \dots, \hat{c}_N(u, p))'$ ,  $\hat{R}_{N,u} = \{\hat{c}_N(u, i - j)\}_{i,j=1,\dots,p}$ , et, la covariance locale calculée à l'aide d'une fenêtre  $h(\cdot)$  et  $H_N = \sum_{j=0}^{N-1} h^2\left(\frac{j}{N}\right)$  :

$$\hat{c}_N(u, k) = \frac{1}{H_N} \sum_{1 \leq t, t+k \leq N} h\left(\frac{t}{N}\right) h\left(\frac{t+k}{N}\right) X_{[uT] - \frac{N}{2} + t, T} X_{[uT] - \frac{N}{2} + t + k, T}$$

Il en résulte l'estimateur de  $h_u(\omega)$  suivant :

$$\hat{h}_u(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_{N,u}^2(u)}{2\pi \left| \sum_{j=0}^p \hat{a}_N(u, j) e^{i\omega j} \right|^2} \quad (3.155)$$

Les estimateurs  $\hat{a}_{N,u}$  et  $\hat{\sigma}_{N,u}^2$  sont calculés sur l'intervalle  $U_N$  de taille  $N$ . Le  $N^{opt}$  optimal qui permet de construire le plus grand intervalle centré sur  $[uT]$  sur lequel le processus est stationnaire, a été présenté par Dahlhaus & Giratis (1998).  $N^{opt}$  dépend entre autres des caractéristiques théoriques propres au processus qu'on veut étudier. C'est à dire que la rigueur exigerait qu'on adapte  $N$  selon le point  $u = \frac{t}{T}$  autour duquel on veut déterminer un estimateur. Mais comme on ignore les caractéristiques théoriques du processus (c'est ce qu'on veut estimer) ? alors on fixe  $N$ . On peut aussi

déterminer  $\widehat{\theta}_N(u)$  (un estimateur de  $\theta(u)$  au point  $u$  sur l'intervalle  $U_N$ ) en utilisant une version locale de la fonction de Whittle sur l'intervalle  $U_N$  :

$$\widehat{\theta}_N(u) = \arg \min_{\theta} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \log h_{\theta(u),u}(\omega) + \frac{I_N(u, \omega)}{h_{\theta(u),u}(\omega)} \right\} d\omega \quad (3.156)$$

où  $I_N(u, \omega) = \frac{1}{2\pi H_N} \left| \sum_{s=0}^{N-1} h\left(\frac{s}{N}\right) X_{[uT] - \frac{N}{2} + s + 1, T} e^{-i\omega s} \right|^2$  est le périodogramme local calculé sur l'intervalle  $U_N$ . Si le processus  $\{X_{t,T}\}_{t=1}^T$  est réellement issu du modèle autorégressif, c'est à dire que si la densité spectrale théorique  $h_u(\omega) = h_{\theta_0(u),u}(\omega)$  [avec  $\theta_0(u)$  étant les vraies paramètres du modèles], alors  $\widehat{\theta}_N(u)$  est un estimateur convergent de  $\theta_0(u)$  [voir Dahlhaus (1997) et Dahlhaus & Giratis (1998)]. Les estimateurs  $\widehat{\theta}_N(u)$  et ceux donnés dans les équations (3.154) sont équivalents [voir Dahlhaus & Giratis (1998)] si on calcule les covariances locales  $\widehat{c}_N(u, j)$  à l'aide du périodogramme local  $I_N(u, \omega)$  :  $\widehat{c}_N(u, j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} I_N(u, \omega) d\omega$ .

## Conclusion

Trois enseignements majeurs de ce chapitre doivent être évoqués. D'abord, le théorème d'Herglotz (par équivalence le théorème de représentation spectrale) constitue un pont entre les deux domaines temporel (fonction de covariance) et fréquentiel (densité spectrale). Il souligne l'équivalence entre les deux domaines dans le sens où le comportement de la fonction de covariance peut être traduit dans le domaine des fréquences. Ce théorème montre alors qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux domaines, mais qu'un problème donné peut être aisément abordable dans un domaine plutôt que dans l'autre. Ce qui nous amène à conclure que les approches temporelles et spectrales ne sont pas exclusives mais se complètent. Ensuite, bien que le concept de la densité spectrale stationnaire soit très bien connu sur le plan

de la théorie, de l'estimation et des applications, ces théorèmes reposent sur une hypothèse forte, c'est à dire la stationnarité du moment d'ordre deux. Lorsqu'une telle hypothèse est relâchée, on admet alors la possibilité pour la fonction de covariance de dépendre du temps et non du délai entre les deux instants d'observation de la série. Dès lors, les théorèmes de représentations perdent leur sens puisqu'ils ne prennent pas en considération la dépendance temporelle. Alors, plusieurs définitions d'une densité spectrale évoluant avec le temps sont proposées dans la littérature. Enfin, dans les approches de Priestley et de Sachs, la densité spectrale est à priori considérée comme pouvant évoluer dans le temps. L'intérêt de cette dernière approche est grand puisqu'elle permet de localiser les fréquences instables et les instants à partir desquels ont eu lieu ces instabilités. Ainsi, la densité spectrale évolutive a cette particularité unique de fournir simultanément les caractéristiques de l'instabilité de la série dans le domaine temporel et fréquentiel. Dans l'étude d'une variable économique, on peut donc vérifier en cas de non stationnarité les composantes fréquentielles qui font l'objet de l'instabilité.

## Chapitre 4

# Densité Spectrale Évolutive & Identification des Changements Structurels

### Introduction

Dans cette section, la question de l'instabilité du processus de l'inflation américaine est soumise à un examen minutieux. Les données sont longuement examinées dans les deux domaines temporel et fréquentiel. Cette étude est justifiée par le manque d'unanimité sur l'évidence empirique concernant l'instabilité. Le test d'instabilité appliqué à la densité spectrale a l'avantage de pouvoir attribuer aux coupures détectées différentes fréquences pouvant nous renseigner sur le terme de l'instabilité (court, moyen ou long terme). Dans cette section, nous essayons d'exploiter la théorie de la densité spectrale évolutive dans le cadre de la détection des éventuels changements structurels qui revient à localiser les principales dates qui traduisent des modifications significatives dans la dynamique d'un phénomène économique structurel. Nous développons une méthode non paramétrique qui ne privilégie à priori aucune modélisation. Elle fait appel à l'analyse temps-fréquence des données. Notre choix de cette approche est motivé d'une part, par les résultats

qu'Artis, Bladen-Hovell & Nachane (1992) ont déjà obtenus sur des données réelles et d'autre part, par les renseignements supplémentaires que la méthode fournit dans le domaine des fréquences. En effet, la connaissance du comportement de la série du point de vue fréquentiel renseigne sur la nature des instabilités observées sur les données, i. e., instabilité de court, moyen ou long terme. Ainsi, Artis et al. (1992) ont exploité cette approche pour analyser les caractéristiques de l'instabilité de la vitesse de circulation de la monnaie dans certains pays de l'OCDE. L'analyse temps-fréquences ou encore l'analyse spectrale des processus non stationnaires est un sujet très ancien. L'ambition des recherches dans ce domaine est d'étendre aux processus non stationnaires ce qu'on sait faire avec les séries stationnaires dans le domaine des fréquences en exploitant les développements récents dans l'analyse spectrale des processus non stationnaires. Le sujet était quasiment abandonné au début des années 1970 avant de réapparaître dans ces dernières années avec l'avènement de la théorie des ondelettes (*wavelets*) comme en témoignent les travaux de Priestley (1996) et Dahlhaus (1996). Comme Artis et al. (1992), nous utilisons la théorie spectrale des processus non stationnaires telle qu'elle a été formalisée par Priestley (1965 & 1996). Dans un premier temps, nous décrivons la méthode utilisant la stabilité de la densité spectrale. Ensuite, nous présentons sa mise en œuvre sur les données de l'inflation américaine, puis nous proposons un algorithme itératif basé sur le test de l'instabilité de la densité spectrale afin de permettre une détection multiple de changements structurels. Enfin, nous faisons le parallèle entre les résultats obtenus, les faits, et les événements socio-économiques qui ont marqué le processus de l'inflation américaine.

Cependant, l'utilisation de la densité spectrale dans le cadre de l'identification des changements structurels pourrait ne pas capturer l'exhaustivité des formes de non stationnarité du processus du fait que nous fixons comme hypothèse de tra-



vail la stationnarité de la moyenne. Par conséquent, nous considérons deux autres approches complémentaires pour pouvoir recenser toutes les formes d'instabilité du processus. La première approche consiste à étudier les instabilités dans la variance du processus. Dans ce cadre, nous considérons l'algorithme itératif d'Inclan et Tiao (1994). Après avoir étudié l'instabilité dans la densité spectrale évolutive et dans la variance du processus, nous menons le même exercice pour identifier l'instabilité dans la moyenne. D'abord, nous utilisons les critères d'information, à savoir, le SIC [voir Schwarz (1978)], le BIC [voir Yao (1988)], le YIC [voir Yao & Au (1989)] et le MIC [voir Liu, Wu & Zidek (1997)]. Ensuite, nous considérons une variété de tests proposée par Bai & Perron (1998).

## 1 Stabilité de la densité spectrale

Il est bien connu que l'étude des séries chronologiques peut se faire dans deux domaines appelés : temporel et fréquentiel. Dans le premier cas, sans doute le plus familier, nous nous intéressons uniquement aux comportements des données entre elles dans la dimension temporelle (par exemple l'étude des corrélations, de la cointégration, des racines unitaires, etc...). Dans le domaine des fréquences, les idées fondamentales reposent sur les théorèmes dits de décomposition. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, ces théorèmes montrent que toute série temporelle stationnaire, disons  $\{Y_t\}$ , peut se décomposer en fonctions des fréquences, i.e.,

$$Y_t = \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (4.1)$$

Ainsi, nous évaluons l'importance d'une fréquence particulière  $\omega$  en mesurant sa pondération (ou encore le spectre)  $E(|A(\omega)dZ(\omega)|^2)$  dans la décomposition ci dessus. Le domaine des fréquences est très souvent employé pour l'étude quantitative des cy-

cles des affaires mais d'autres applications existent également. Malgré les apparences, les deux domaines temporel et fréquentiel ne sont pas exclusifs dans le sens où il existe des relations mathématiques fortes entre eux. Ainsi, la fonction d'autocovariance (domaine temporel) est reliée à la densité spectrale (domaine des fréquences) par une transformée de Fourier. Dans la décomposition en fréquences (4.1), on peut remarquer que la fonction de transfert (i.e.,  $A(\omega)$ ) ne varie pas dans le temps mais dépend uniquement de la variable fréquence  $\omega$ . Cela s'explique par la stationnarité du processus  $\{Y_t\}$ , tout comme la fonction d'autocovariance d'une série stationnaire dépend uniquement des retards mais non pas du temps. Or, la stationnarité est une hypothèse très forte et improbable dans le cas des séries longues (c'est le cas des données étudiées dans ce chapitre). D'où la nécessité de redéfinir la relation (4.1) pour caractériser les données non stationnaires, par exemple en introduisant la variable temps dans la fonction de transfert. Ainsi, pour un processus  $\{X_t\}$  non stationnaire, nous pouvons adopter la décomposition suivante :

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (4.2)$$

où la quantité  $E(|A_t(\omega)dZ(\omega)|^2)$  désigne un spectre évolutif puisqu'elle varie à la fois dans les deux dimensions temps et fréquences. Tout comme la relation (4.1) est fondamentale pour l'étude des séries stationnaires dans le domaine des fréquences, elle est à l'origine de nombreuses théories relatives à l'analyse spectrale des données non stationnaires, par exemple les théories de Priestley (1965 & 1996) et Adak (1998). Comme Artis et al. (1992), nous adoptons l'approche de Priestley que nous rappelons sa description dans les paragraphes suivants. Le test de stabilité de la densité spectrale<sup>1</sup> que nous appliquons dans ce chapitre est basé sur les variations de la

---

<sup>1</sup>Voir Von Sachs & Neumann (2000).

fonction temps-fréquences :  $E(|A_t(\omega)dZ(\omega)|^2)$ . Une telle fonction permet d'estimer à la fois les dates de changement de régime et les fréquences concernées par l'instabilité. L'estimation des fréquences instables fournit un avantage supplémentaire que d'autres techniques d'étude ne permettent pas. En effet, selon que la fréquence instable soit basse ou haute, l'instabilité sera respectivement de long ou de court terme. Cette approche a été exploitée par Artis et al. (1992) pour étudier l'instabilité de la vitesse de circulation de la monnaie dans certains pays de l'OCDE. Dans les paragraphes suivants, nous présentons brièvement la théorie de Priestley qui nous servira pour définir les tests de (in)stabilité de la densité spectrale.

## 1.1 Théorie du Spectre Évolutif de Priestley

La théorie du spectre évolutif de Priestley (1965) concerne les processus non stationnaires et appelés oscillatoires, i.e., les processus  $\{X_t\}$  définis en (4.2) où pour chaque fréquence  $\omega$ , la séquence  $\{A_t(\omega)\}$  comme fonction de  $t$  admet une transformée de Fourier maximum (en module) en zéro avec  $\{Z(\omega)\}$  un processus orthogonal sur  $[-\pi, \pi]$ ,  $E[dZ(\omega)] = 0$ ,  $E[|dZ(\omega)|^2] = d\mu(\omega)$  et  $\mu(\omega)$  une mesure. Sans perte de généralité, la densité spectrale évolutive de  $\{X_t\}$  est la fonction  $h_t(\omega)$  définie comme suit :

$$h_t(\omega) = \frac{dH_t(\omega)}{d\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (4.3)$$

où  $dH_t(\omega) = |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega)$ . La théorie de Priestley est particulièrement attractive puisqu'elle conserve une interprétation physique. Elle généralise diverses théories spectrales dans le cas non stationnaire. Enfin, beaucoup de processus non station-

---

<sup>2</sup>Cette condition implique  $E(X_t) = 0$ .

naires sont approximativement oscillatoires. La variance de  $\{X_t\}$  à l'instant  $t$  est :

$$\sigma_t^2 = \text{var}(X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} h_t(\omega) d\omega. \quad (4.4)$$

À titre indicatif, il est à noter que le test de Priestley considère la décomposition générale suivante de  $\log(h_t(\omega))$  :

$$\log(h_t(\omega)) = \mu + \alpha_t + \beta_\omega + \gamma_{t\omega} \quad (4.5)$$

où,  $\mu$  est une constante,  $\alpha_t$  et  $\beta_\omega$  représentent respectivement les effets des variables temps et fréquences sur  $h_t(\omega)$ . Enfin,  $\gamma_{t\omega}$  désigne les effets d'interaction entre les deux termes  $\alpha_t$  et  $\beta_\omega$ . Pour un processus stationnaire, il n'y a ni effet temporel ni effet d'interaction dans la décomposition générale de la densité spectrale. D'où :

$$\{X_t\} \text{ est stationnaire} \iff \log(h_t(\omega)) = \mu + \beta_\omega \quad \text{avec} \quad \alpha_t = \gamma_{t\omega} = 0$$

Nous supposons que le processus  $\{X_t\}$  est non stationnaire, de la forme  $X_t = C_t X_t^0$  où  $C_t$  est une fonction positive et  $\{X_t^0\}$  est un processus stationnaire (on dit que  $\{X_t^0\}$  est un processus à amplitude modulée). Dans ce cas, la densité spectrale théorique de  $X_t$  s'écrit exactement :  $h_t(\omega) = C_t^2 h^0(\omega)$  où  $h^0(\omega)$  est la densité spectrale du processus stationnaire  $\{X_t^0\}$ . D'où,  $\log(h_t(\omega)) = \log(C_t^2) + \log(h^0(\omega))$  avec  $\alpha_t = \log(C_t^2)$  et  $\beta_\omega = \log(h^0(\omega))$ . Ce qui signifie, qu'il n'y a pas d'effet d'interaction dans un processus à amplitude modulée ( $\gamma_{t\omega} = 0$ ) :

$$\{X_t = C_t X_t^0\} \text{ amplitude modulée} \iff \log(h_t(\omega)) = \mu + \alpha_t + \beta_\omega$$

Nous pouvons aussi caractériser à l'aide de la densité spectrale évolutive, les bruits blancs :

$$\{X_t\} \text{ est bruit blanc } \iff \log(h_t(\omega)) = \mu$$

Lorsque  $\{X_t\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $\text{var}(X_t) = \sigma^2$  alors  $h_t(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$  d'où :

$$\{X_t\} \text{ indépendantes avec } \text{var}(X_t) = \sigma^2 \iff \log(h_t(\omega)) = \mu$$

Le test de stationnarité de Priestley est composé de plusieurs étapes qui consistent à vérifier d'abord la présence ou l'absence d'une interaction  $\gamma_{t\omega}$ . Dans le cas où l'interaction existe (c'est à dire que  $\gamma_{t\omega} \neq 0$ ), on rejette la stationnarité. Dans le cas contraire ( $\gamma_{t\omega} = 0$ ), nous concluons que le processus a la forme d'une amplitude modulée et nous poursuivons le test pour vérifier si les effets temporels  $\alpha_t$  existent ou pas. Si le test confirme l'absence de  $\alpha_t$  alors, nous pouvons conclure que le processus est stationnaire. Si au contraire,  $\alpha_t \neq 0$ , alors, nous rejetons l'hypothèse de stationnarité.

Un estimateur de  $h_t(\omega)$  à l'instant  $t$  et à la fréquence  $\omega$ , peut être calculé en utilisant deux fenêtres  $\{g_u\}$  et  $\{w_v\}$ . Sans perte de généralité,  $\widehat{h}_t(\omega)$  est construit comme suit :

$$\widehat{h}_t(\omega) = \sum_{v \in Z} w_v |U_{t-v}(\omega)|^2, \quad (4.6)$$

avec  $U_t(\omega) = \sum_{u \in Z} g_u X_{t-u} e^{-i\omega(t-u)}$ . Nous choisirons  $\{g_u\}$  et  $\{w_v\}$  de la façon suivante :

$$g_u = \begin{cases} 1/(2\sqrt{h\pi}) & \text{si } |u| \leq h \\ 0 & \text{si } |u| > h \end{cases} \quad \text{et } w_v = \begin{cases} 1/T' & \text{si } |v| \leq T'/2 \\ 0 & \text{si } |v| > T'/2 \end{cases}. \quad (4.7)$$

Ici  $h = 7$  et  $T' = 20$  (même choix qu' Artis et al. (1992)). D'après Priestley (1969 & 1988) nous avons,  $E(\widehat{h}_t(\omega)) \approx h_t(\omega)$ ,  $\text{var}(\widehat{h}_t(\omega))$  décroît quand  $T'$  croît et :  $\forall (t_1, t_2)$ ,  $\forall (\omega_1, \omega_2)$ ,  $\text{cov}[\widehat{h}_{t_1}(\omega_1), \widehat{h}_{t_2}(\omega_2)] \approx 0$ , si au moins l'une des conditions (i) ou (ii) est

satisfaite :

$$(i) \quad |t_1 - t_2| \geq T', \quad (ii) \quad |\omega_1 \pm \omega_2| \geq \frac{\pi}{h}. \quad (4.8)$$

## 1.2 Test d'Artis, Bladen-Hovell et Nachane (1992)

L'approche utilisée par Artis et al.(1992) est basée sur un test cusum et destinée à vérifier la stabilité de la densité spectrale évolutive autour d'une valeur moyenne  $k$ . La mise en œuvre de leur test nécessite au préalable le choix d'une valeur de référence  $k$ . Mais, les auteurs ne fournissent pas une justification rigoureuse dans le choix de  $k$ . D'autre part, lorsque nous appliquons leur approche sur les données de l'inflation aux États-Unis<sup>3</sup>, aucun point d'instabilité n'est repéré, ce qui est paradoxal étant donné les diverses crises ayant eu lieu depuis la fin de la deuxième guerre mondiale. Les auteurs considèrent la statistique suivante :

$$W_r = \frac{1}{\hat{\sigma}_k} \sum_{i=1}^r (Y_i - k), \text{ avec } r \in \{1, \dots, I\} \quad (4.9)$$

où  $Y_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^7 Y_{ij}$  et  $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (Y_i - k)^2$ . Pour chaque  $i$  fixé ( c'est à dire  $t_i$  fixé), la quantité  $Y_i$  représente la valeur moyenne des  $Y_{ij} = \log(\hat{h}_{t_i}(\omega_j))$  lorsque  $j$  décrit la grille des fréquences  $fr = \{\frac{\pi}{20}(1 + 3(j-1))\}_{j=1}^7$ . Le choix de la valeur de référence  $k$  adoptée par les auteurs est le suivant :

$$k = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I \sum_{j'=1}^{19} Y_{ij'}, \quad (4.10)$$

où  $j'$  décrit cette fois une grille de fréquence  $fr'$  plus vaste que  $fr$  (c'est à dire que  $fr \subset fr'$ ) :

$$fr' = \left\{ \frac{\pi}{20} j' \right\}_{j'=1}^{19}. \quad (4.11)$$

---

<sup>3</sup>Nous considérons les données de l'indice des prix à la consommation, CPI, (la série est désaisonnalisée). Nous utilisons les statistiques de la Réserve Fédérale de Saint Louis. Les données sont mensuelles et couvrent la période allant de Janvier 1946 jusqu'août 2001.

Lorsque la courbe  $(r, W_r)$  rencontre une des deux droites d'équations  $W_\alpha(r) = \pm(C_\alpha\sqrt{I} + \frac{2C_\alpha r}{\sqrt{I}})$ , alors l'ensemble des points d'intersection  $\{r^*\}$  est considéré comme un ensemble d'estimateurs possibles de dates de changements de régimes au seuil  $\alpha$ . Les valeurs  $C_\alpha$  étant tabulées.

Pour déterminer si une fréquence  $\omega_j \in fr$  est éventuellement instable, les auteurs considèrent une statistique de la forme  $W_j$  suivante :

$$W_r^{(j)} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{k_j}} \sum_{i=1}^r (Y_{.j} - k_j), \text{ avec } r \in \{1, \dots, I\},$$

où  $Y_{.j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{ij}$  et  $\hat{\sigma}_{k_j}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (Y_{.j} - k_j)^2$ . Le choix de la valeur de référence  $k_j$  adoptée par les auteurs est le suivant :

$$k_j = \frac{1}{I'} \sum_{i=1}^{I'} Y_{ij}, \quad (4.12)$$

où  $I'$  désigne cette fois la taille d'une grille de temps  $t'_{ps}$  plus vaste que  $t_{ps}$  ( $t_{ps} \subset t'_{ps}$ ). Cependant les instants de rupture sont étudiés sur  $t_{ps}$ . La fréquence  $\omega_j$  est considérée instable si la courbe  $(r, W_r^{(j)})$  coupe une des droites d'équations  $W_\alpha(r) = \pm(C_\alpha\sqrt{I} + \frac{2C_\alpha r}{\sqrt{I}})$ . Il n'y a pas de fondements rigoureux sur le choix des valeurs de références  $k$  et  $k_j$ . Ces choix sont seulement destinés à ralentir les convergences de  $W_r$  et  $W_r^{(j)}$  vers zéro lorsque  $r$  tend vers  $I$ . La détermination de  $k$  nécessite le calcul des  $Y_{ij'}$  pour d'autres fréquences  $\omega_{j'}$  qui ne sont pas dans  $fr$  et le calcul de  $k_j$  implique d'autres instants qui ne sont pas dans la grille de temps étudiée. Par ailleurs, les instants de ruptures issus de la statistique  $W_r^{(j)}$  (correspondants à l'instabilité de la fréquence de  $\omega_j$ ) ne correspondent pas nécessairement à ceux obtenus par la statistique  $W_r$  qui étudie la stabilité d'une valeur moyenne de la densité spectrale. Notre approche est fondée sur le résultat montré par Ahamada et Boutahar (2002), selon lequel le choix d'une valeur de référence, basé exactement sur la valeur moyenne des  $Y_{ij}$  lorsque

$j \in fr$  (c'est à dire  $\mu_\omega$ ), permet la détermination rigoureuse de la distribution asymptotique de notre statistique  $T_\omega$ . Il n'y a pas nécessité d'impliquer d'autres grilles de temps ou de fréquences que celles déjà fixées pour l'étude de la série.

### 1.3 Test de stationnarité basé sur la densité spectrale évolutive

#### 1.3.1 Le Fondement du test

Considérons les données  $\{X_t\}_{t=1}^T$  provenant d'un processus  $\{X_t\}$  qui n'est pas à priori stationnaire et qui possède une densité spectrale évolutive théorique  $h_t(\omega)$ . Soit  $\{t_i\}_{i=1}^I \subseteq \{1, \dots, T\}$  un sous ensemble de taille  $I$ , représentant l'échelle du temps, dans lequel les éléments vérifient deux à deux la condition (i) de (4.8). Posons pour toute fréquence  $\omega \in (0, \pi)$  et pour tout  $t_i \in \{t_i\}_{i=1}^I$ ,  $h_{i\omega} = \log h_{t_i}(\omega)$ ,  $Y_{i\omega} = \log \widehat{h}_{t_i}(\omega)$  où  $\widehat{h}_{t_i}(\omega)$  est un estimateur de  $h_{t_i}(\omega)$  conformément à la relation (4.6),  $\mu_\omega = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i\omega}$ ,  $\widehat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (Y_{i\omega} - \mu_\omega)^2$ ,  $S_r^\omega = \frac{1}{\widehat{\sigma}_\omega \sqrt{I}} \sum_{i=1}^r (Y_{i\omega} - \mu_\omega)$  avec  $r = 1, \dots, I$ ; et  $T_\omega = \max_{r=1, \dots, I} |S_r^\omega|$ . Ainsi d'après Priestley (1969), nous avons le modèle suivant :

$$Y_{i\omega} \approx h_{i\omega} + e_{i\omega}, \quad i = 1, \dots, I \quad (4.13)$$

où la séquence  $\{e_{i\omega}\}$  est approximativement indépendante et identiquement distribuée suivant une loi normale. La relation (4.13) est une égalité approximative et les conditions (i) et (ii), présentées dans les inégalités (4.8), jouent un rôle important dans sa validité. Pour tout  $\omega \in (0, \pi)$ , nous dirons que  $\omega$  est une fréquence stable du processus  $\{X_t\}$ , si la valeur de la densité spectrale évolutive calculée en  $\omega$ , est indépendante du temps, i.e.,  $\forall t, h_t(\omega) = c_\omega$ . Remarquons qu'un processus est stationnaire si sa densité spectrale est indépendante du temps, donc si toutes les fréquences sont stables. Ahamada et Boutahar (2002) ont montré, se



fondant sur deux théorèmes de Ploberger et Krämer (1992) et celui de Billingsley (1968), que sous l'hypothèse nulle de la stabilité de la fréquence  $\omega$  (i.e.  $h_{i\omega}$  indépendant de  $i$ ), la distribution limite de la statistique  $T_\omega$  est donnée par :  $F_1(a) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \exp(-2k^2 a^2)$ .

En utilisant la fonction de répartition  $F_1(\cdot)$ , nous pouvons calculer des valeurs critiques  $C_\alpha$ , i.e.  $Pr(T_\omega > C_\alpha) = \alpha$  (par exemple,  $C_{0.1} = 1.22$ ,  $C_{0.05} = 1.36$  et  $C_{0.01} = 1.63$ ). Si la statistique  $T_\omega$  rejette la stabilité de  $\omega$  avec un risque  $\alpha$  (i.e.  $T_\omega > C_\alpha$ ), alors le point  $r_{\max}$  où  $|S_r^\omega|$  atteint son maximum (i.e.,  $T_\omega = |S_{r_{\max}}^\omega|$ ) est un estimateur de la principale date de changement de régime de la série. Le point  $r_{\max}$  est une estimation de l'instant à partir duquel la valeur de la densité spectrale en  $\omega$  varie le plus. Si la fréquence instable est proche de zéro, alors le changement de régime constaté concerne le long terme. Inversement, si la fréquence instable est plutôt proche de  $\pi$ , alors le changement n'est qu'une rupture de court terme. Par ailleurs, si la fréquence instable est située dans le voisinage de  $\pi/2$ , alors le changement structurel est de moyen terme. Généralement, nous pouvons considérer la relation de transmission, inversement proportionnelle du domaine fréquentiel au domaine temporel, suivante :  $T = \pi/\omega$ , avec  $\omega$  la fréquence instable et  $T$  la correspondance temporelle de la durée du changement structurel exprimée en terme de la même périodicité des données considérées [ici, l'unité est trimestrielle].

### 1.3.2 Application sur l'Inflation aux États-Unis

Nous appliquons le test  $T_\omega$  ci-dessus sur les données<sup>4</sup> des taux d'inflation aux États-Unis. Il s'agit de données mensuelles de taille  $T = 668$ . Pour cela, il faut

---

<sup>4</sup>Nous considérons exactement la même série de l'inflation utilisée pour appliquer le test d'Artis et al. (1992), à savoir, les données de l'indice des prix à la consommation, CPI, (la série est désaisonnalisée). Nous utilisons les statistiques de la Réserve Fédérale de Saint Louis. Les données sont mensuelles et couvrent la période allant de Janvier 1946 jusqu'août 2001.

faire au préalable le choix de l'échelle des temps  $\{t_i\}_{i=1}^I$  sur laquelle sera calculée la densité spectrale, conformément à la condition  $\{i\}$  de la relation (4.8). Nous faisons le choix suivant :

$$\{t_i = 18 + 24i\}_{i=1}^I \text{ où } I = \lfloor \frac{T}{24} \rfloor \text{ et } T \text{ la taille de l'échantillon.} \quad (4.14)$$

Le choix de tels écarts de longueur 24 entre des dates, s'explique par le souci de valider la condition (i) de la relation (4.8) (rappelons que nous avons choisi  $T' = 20$ ). Nous sommes en mesure maintenant de tester la stabilité de n'importe quelle fréquence  $\omega \in (0, \pi)$  et de repérer les dates correspondantes à ces instabilités parmi les éléments de  $\{t_i = 18 + 24i\}_{i=1}^I$ . Cependant, on ne peut pas examiner toutes les fréquences car l'ensemble  $(0, \pi)$  n'est pas fini, il faut donc choisir un ensemble discret et fini des fréquences  $\{\omega_j\}$  sur lequel on calculera les statistiques  $T_{\omega_j}$ . Nous choisissons l'ensemble  $\{\omega_j\}$  suivant :

$$\{\omega_j = \frac{\pi}{20}(1 + 3(j - 1))\}_{j=1}^7. \quad (4.15)$$

Nous pouvons vérifier qu'un tel choix permet de valider la condition (ii) de la relation (4.8) (rappelons que nous avons choisi  $h = 7$ ). C'est l'une des conditions suffisantes pour obtenir des valeurs non corrélées de la densité spectrale. Le tableau (4.2) résume les valeurs des  $S_r^{\omega_j}$  pour  $r = 1, \dots, I$  et pour chaque fréquence  $\omega_j$ . Ce tableau indique également, avec le symbole (\*), les valeurs des statistiques  $T_{\omega_j} = \max_{r=1, \dots, I} |S_r^{\omega_j}|$  ainsi que les dates  $r_{\max}$  (les dates possibles de changement de régime) où les valeurs maximales des  $S_r^{\omega_j}$  sont atteintes.

Dates ( $r_{\max}$ )	Fréquences ( $\omega$ )
1975 :12	$10\pi/20 - 13\pi/20 - 16\pi/20 - 19\pi/20$
1981 :08	$\pi/20 - 4\pi/20 - 7\pi/20$

Tableau. (4.1) : Résultats du test Cusum appliqué sur la densité spectrale

Deux dates sont indiquées par les tests [voir le tableau (4.1)], 1975.12 et 1981.08. Pour la date de 1975.12, ce sont les composantes de moyen et court terme de la série qui sont touchées (fréquences autour de  $\frac{\pi}{2}$  et fréquences proche de  $\pi$ ) alors que pour la date de 1981.08, ce sont les composantes de long terme qui sont concernées (fréquences proche de zéro). Cela signifie que le changement de régime amorcé dans les années 1980 est persistant alors que pour l'année 1975 il s'agit de mouvements moyennement longs accompagnés par des bruits transitoires.

Tableau. (4.2)	Long Terme			Court et Moyen Terme			
	$S_r^{\pi/20}$	$S_r^{4\pi/20}$	$S_r^{7\pi/20}$	$S_r^{10\pi/20}$	$S_r^{13\pi/20}$	$S_r^{16\pi/20}$	$S_r^{19\pi/20}$
1 (1947 :06)	0.4634	0.4431	0.4944	0.5638	0.4450	0.4020	0.3703
2 (1949 :06)	0.6029	0.7358	0.7953	0.8422	0.7406	0.7594	0.6311
3 (1951 :06)	0.8786	1.0204	1.1319	1.0418	0.9469	0.9262	0.8119
4 (1953 :06)	0.7654	1.1527	1.2301	1.1815	1.0618	1.1469	0.9321
5 (1955 :06)	0.7156	1.2761	1.2552	1.2947	1.1956	1.3055	1.0593
6 (1957 :06)	0.8368	1.4132	1.3475	1.4511	1.3864	1.4891	1.2560
7 (1959 :06)	0.7793	1.4377	1.4468	1.5470	1.5501	1.6592	1.4449
8 (1961 :06)	0.6751	1.4127	1.4162	1.6319	1.7003	1.8229	1.6000
9 (1963 :06)	0.5927	1.3473	1.4385	1.6883	1.8185	1.8253	1.6809
10 (1965 :06)	0.6325	1.3681	1.4911	1.7757	1.9425	1.9002	1.8758
11 (1967 :06)	0.7409	1.4244	1.5323	1.7619	1.9768	1.9426	1.9605
12 (1969 :06)	0.9287	1.5084	1.6041	1.8840	1.9777	1.9417	1.9954
13 (1971 :06)	1.0124	1.5410	1.6708	1.8847	1.9987	1.9955	2.0863
14 (1973 :06)	1.2480	1.6615	1.8552	1.9250	2.1745	2.1706	2.2431
15 (1975 :06)	1.4208	1.7601	1.9403	1.9680*	2.1953*	2.2182*	2.2612*
16 (1977 :06)	1.5442	1.8231	1.9274	1.9276	2.0710	2.0457	2.2526
17 (1979 :06)	1.7473	1.9323	1.9848	1.9448	2.0234	1.9359	2.1932
18 (1981 :06)*	1.8326*	1.9645*	1.9858*	1.8992	1.9409	1.8631	2.1567
19 (1983 :06)	1.7254	1.9217	1.8480	1.8329	1.8833	1.7212	1.9734
20 (1985 :06)	1.5498	1.7898	1.6744	1.6744	1.6056	1.4984	1.7082
21 (1987 :06)	1.4237	1.6179	1.4852	1.5211	1.3828	1.3392	1.4771
22 (1989 :06)	1.3264	1.4976	1.2982	1.3608	1.2262	1.2012	1.3216
23 (1991 :06)	1.1459	1.2860	1.0431	1.1610	1.0023	1.0364	1.1164
24 (1993 :06)	0.8901	0.9753	0.7759	0.8904	0.7201	0.8304	0.8486
25 (1995 :06)	0.6283	0.6950	0.5070	0.6006	0.4717	0.6121	0.5889
26 (1997 :06)	0.2790	0.3131	0.2004	0.2692	0.1618	0.2339	0.2406
27 (1999 :06)	$1.89e^{-014}$	$8.92e^{-015}$	$5.12e^{-015}$	$6.58e^{-015}$	$9.10e^{-015}$	$7.11e^{-016}$	$6.62e^{-015}$
28 (2001 :06)	$4.23e^{-014}$	$2.02e^{-016}$	$8.52e^{-015}$	$1.14e^{-016}$	$3.01e^{-016}$	$1.72e^{-017}$	$2.88e^{-016}$

#### 1.4 Extension du test : Un Algorithme Séquentiel pour l'identification de Points de rupture multiples

L'insuffisance de la procédure du test de stationnarité basé sur la densité spectrale présentée dans les paragraphes précédents s'explique par deux faits. D'une part, la capacité du test proposé à identifier l'instabilité de la densité spectrale et donc les éventuels points de rupture sont limités dans le sens où la statistique sur laquelle

est fondé ce test, soit  $T_\omega = \max_{r=1,\dots,I} |S_r^\omega|$ , ne permet que l'identification d'un seul point de rupture à la fois associé à une fréquence  $\omega$  si la statistique  $T_\omega$  dépasse la valeur critique  $C_\alpha$  correspondant à un risque  $\alpha$ . Par conséquent, si le processus  $\{X_t\}$  regroupe plusieurs points de changement structurel, ce test ne peut nous renseigner uniquement sur le premier point de rupture dans la mesure où la statistique  $T_\omega$  est définie comme le maximum de  $S_r^\omega$ . D'autre part, nous rappelons qu'il est nécessaire de construire deux fenêtres  $\{g_u\}$  et  $\{w_v\}$  pour le calcul de l'estimateur de  $h_t(\omega)$  à l'instant  $t$  et à la fréquence  $\omega$ . D'après Priestley (1969 & 1988), deux restrictions sont imposées à la construction des fenêtres mais le respect de l'une d'entre elles suffira pour garantir les propriétés statistiques de l'estimateur  $\hat{h}_t$ .

Notre objectif est double. Nous cherchons à exploiter la première procédure d'Ahmad & Ben Aïssa (2004) pour identifier les multiples points de rupture possibles et nous voulons aussi libérer l'un des deux axes ou bien l'axe fréquentiel ou l'axe temporel de la restriction imposée pour la construction de leurs fenêtres correspondantes. Et ainsi, selon notre choix de l'axe à libérer, nous pouvons apporter beaucoup plus de précision dans la détermination temporelle du point de rupture. Par exemple, si nous libérons l'ensemble des temps (i.e., nous considérons que  $T' = 1$ ), il y aura autant d'éléments<sup>5</sup> composants l'ensemble  $\{w_v\}$  que d'observations  $T$  du processus  $\{X_t\}$ .

Nous reconsidérons la densité spectrale évolutive  $h_t(\omega)$  de  $\{X_t\}$  définie comme suit :

---

<sup>5</sup>Le relâchement de cette restriction a pour conséquence un ensemble infini d'éléments. Nous limitons cet abandon de la condition de Priestley sur les entiers. Cependant, la fenêtre temps peut être plus précise si nous considérons d'autres ensembles comme l'ensemble des décimaux par exemple.

$$h_t(\omega) = \frac{dH_t(\omega)}{d\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

où  $dH_t(\omega) = |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega)$ . L'estimateur de  $h_t(\omega)$  à l'instant  $t$  et à la fréquence  $\omega$ , peut être calculé en utilisant deux fenêtres  $\{g_u\}$  et  $\{w_v\}$ .  $\widehat{h}_t(\omega)$  est construit alors comme suit :

$$\widehat{h}_t(\omega) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} w_v |U_{t-v}(\omega)|^2,$$

avec  $U_t(\omega) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} g_u X_{t-u} e^{-i\omega(t-u)}$ . Nous choisissons  $\{g_u\}$  et  $\{w_v\}$  toujours de la même façon que pour le précédent test :

$$g_u = \begin{cases} 1/(2\sqrt{h\pi}) & \text{si } |u| \leq h \\ 0 & \text{si } |u| > h \end{cases} \quad \text{et } w_v = \begin{cases} 1/T' & \text{si } |v| \leq T'/2 \\ 0 & \text{si } |v| > T'/2 \end{cases}.$$

Seulement, nous allons opter ici pour le relâchement de la condition (i),  $|t_1 - t_2| \geq T'$ , relative à la construction de la fenêtre  $g_u$  (pour cela, nous choisissons  $T' = 1$ ). Par conséquent, nous avons l'obligation de respecter la condition (ii),  $|\omega_1 \pm \omega_2| \geq \frac{\pi}{h}$ , relative à la construction de la fenêtre  $w_v$  (pour cela, nous faisons le même choix qu'auparavant  $h = 7$ ) pour garantir les propriétés statistiques de l'estimateur  $\widehat{h}_t(\omega)$ , à savoir, un estimateur sans biais :  $E(\widehat{h}_t(\omega)) \approx h_t(\omega)$ , et une covariance nulle :  $\forall (t_1, t_2), \forall (\omega_1, \omega_2), \text{cov}[\widehat{h}_{t_1}(\omega_1), \widehat{h}_{t_2}(\omega_2)] \approx 0$ , [voir Priestley (1969 & 1988)].

Inclan et Tiao (1994) ont proposé un algorithme itératif basé sur un test CuSum pour tester l'instabilité de la variance. Nous nous inspirons de cette approche pour configurer un algorithme séquentiel afin d'identifier successivement les différents points de rupture pour lesquelles nous rejetons l'hypothèse nulle de la stationnarité de la densité spectrale évolutive.

Si la statistique  $T_\omega$  rejette la stabilité de  $\omega$  avec un risque  $\alpha$  (i.e.  $T_\omega > C_\alpha$ ) alors le point  $r_{\max}$  où  $|S_r^\omega|$  atteint son maximum (i.e.,  $T_\omega = |S_{r_{\max}}^\omega|$ ) est un estimateur

de la date principale de changement de régime de la série. Le point  $r_{\max}$  est une estimation de l'instant à partir duquel la valeur de la densité spectrale en  $\omega$  varie le plus. Si la fréquence instable est proche de zéro alors le changement de régime constaté concerne le long-terme.

Nous appliquons le même test dont la statistique fondamentale  $T_\omega$  est présentée ci-dessus sur les données des taux d'inflation aux États-Unis. Les données sont mensuelles (la série est désaisonnalisée). Nous obtenons la série de l'inflation à partir de l'indice des prix à la consommation. Les statistiques considérées sont celles de la Réserve Fédérale de Saint Louis couvrant la période allant de janvier 1957 à avril 2003, dont la taille<sup>6</sup> est ( $T = 556$ ). Pour cela, nous rappelons le choix de l'échelle des temps  $\{t_i\}_{i=1}^T$  sur laquelle sera calculée la densité spectrale :

$$\{t_i = i\}_{i=1}^T \quad \text{où } T \text{ la taille de l'échantillon.} \quad (4.16)$$

Nous sommes maintenant en mesure de tester la stabilité de n'importe quelle fréquence  $\omega \in (0, \pi)$  et de repérer les dates correspondant à ces instabilités parmi les éléments de  $\{t_i = i\}_{i=1}^T$ . Cependant, il faut choisir un ensemble discret et fini des fréquences  $\{\omega_j\}$  sur lequel on calculera les statistiques  $T_{\omega_j}$ . Nous choisissons le même ensemble  $\{\omega_j\}$  qu'auparavant :

$$\{\omega_j = \frac{\pi}{20}(1 + 3(j - 1))\}_{j=1}^7. \quad (4.17)$$

On peut vérifier qu'un tel choix permet de valider la condition (ii) de la relation (4.8) (rappelons que nous avons choisi  $h = 7$ ). C'est l'une des conditions suffisantes pour obtenir des valeurs non corrélées de la densité spectrale.

---

<sup>6</sup>Cette fois-ci, nous considérons une série plus courte comparativement avec celle utilisée dans les deux derniers tests. Etant donné que la procédure algorithmique de Bai et Perron (1998) ne supporte pas de série dont la taille soit supérieure à  $T = 560$ , par conséquent, nous avons souhaité disposer d'une même série de données pour les deux approches (la densité spectrale et la moyenne).

Cette première étape du déroulement de l'algorithme consiste à appliquer exactement la même procédure du test de stationnarité de la densité spectrale évolutive. La seule différence à noter dans la première étape consiste dans le fait que pour une fréquence donnée et définie dans l'ensemble  $\{\omega_j\}_{j=1}^7$ , nous pouvons calculer  $S_r^\omega$ , avec  $r = 1, \dots, T$ .

Les étapes suivantes consistent à itérer cette première procédure sur les sous-ensembles qui ressortent au fur et à mesure que nous identifions des points de rupture. Il est à rappeler que la première étape s'achève en identifiant au plus un seul point de rupture. Au cas où nous rejetons l'hypothèse nulle de la stationnarité de la densité spectrale (i.e.,  $T_{\omega_j} = |S_{r_{\max}}^{\omega_j}| > C_\alpha$ ), le point  $r_{\max}$  est déclaré point de rupture auquel nous associons la fréquence  $\omega_j$ . Par conséquent, deux sous-ensembles de  $\{t_i = i\}_{i=1}^T$  en découlent :  $\{t_i = i\}_{i=1}^{(r_{\max}-1)}$  et  $\{t_i = i\}_{i=(r_{\max}+1)}^T$ . Alors, nous pouvons commencer la deuxième étape qui consiste simplement à ré-appliquer le test sur les deux nouveaux sous-ensembles temporels qui délimitent de part et d'autre la première date de rupture. Le but de cette étape est de rechercher d'autres points de ruptures éventuels dans ces sous-ensembles. Cette deuxième étape permettra d'identifier au plus deux nouveaux points de rupture. Tant que l'hypothèse nulle de la stationnarité de la densité spectrale est rejetée (i.e., nous continuons à valider des nouveaux points de rupture), l'algorithme continuera en appliquant le test sur les nouveaux sous-ensemble temporels qui encadrent les nouveaux points de rupture identifiés. Le déroulement de l'algorithme ne peut s'arrêter d'explorer les densités spectrales évolutives relatives aux données que seulement si nous acceptons l'hypothèse nulle de la stationnarité de la densité spectrale. Sur le graphique (4.1), nous pouvons voir le déroulement de cet algorithme séquentiel relatif à la fréquence la plus basse ( $\omega_1 = \frac{\pi}{20}$ ) et associé à un risque de  $\alpha = 1\%$  ( $c_\alpha = 1.63$ ).



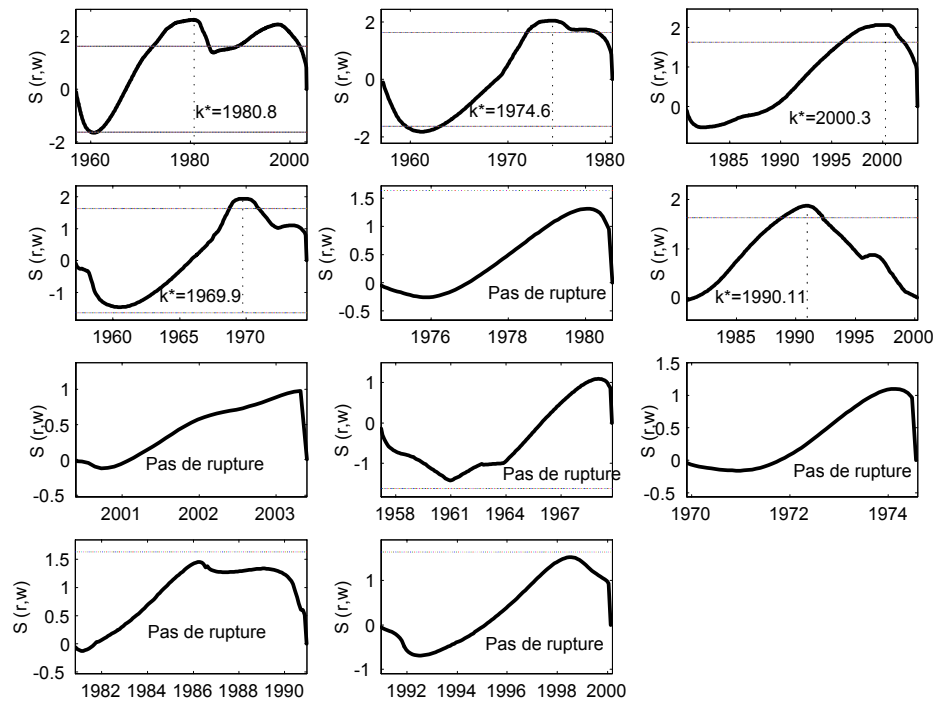
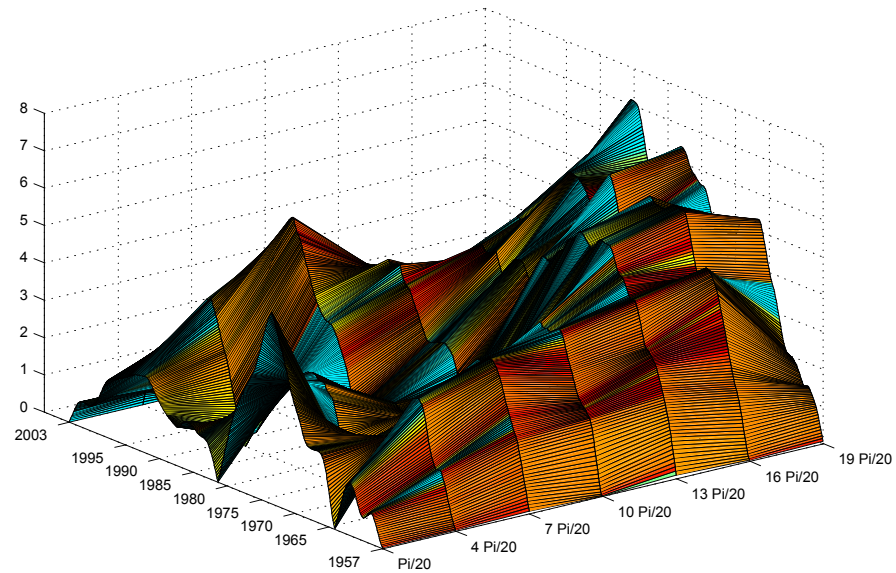


Figure (4.1) : Les résultats de l'algorithme séquentiel

Sur le graphique (4.2) , nous illustrons les valeurs de  $\hat{h}_t(\omega_j)$ , pour  $j = 1, \dots, 7$ . Ces estimations sont appliquées sur la totalité de l'ensemble  $T$  dans le cadre de la première étape de l'algorithme séquentiel.

Figure (4.2) : Représentation temps-fréquence de  $\hat{h}_t(\omega_j)$ 

Quant au graphique (4.3), il représente les valeurs de la statistique  $S_r^{\omega_j}$ , pour  $j = 1, \dots, 7$ . Ces dernières sont à l'origine de la statistique du test, soit  $T_\omega^j = \max_{r=1, \dots, I} |S_r^{\omega_j}|$ , appliquées sur la totalité de l'ensemble  $T$  dans le cadre de la première étape de l'algorithme séquentiel.

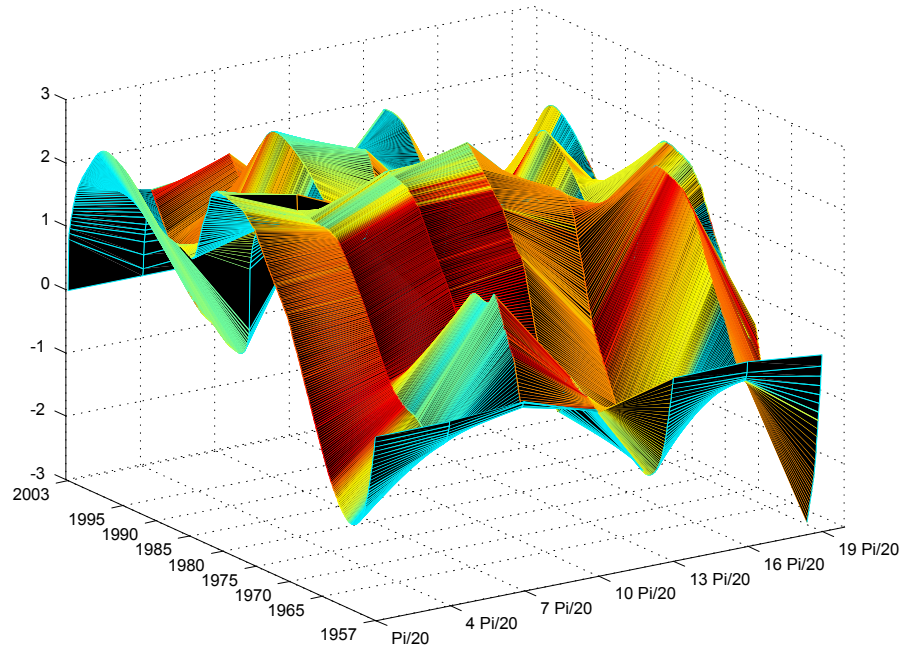


Figure (4.3) : Représentation temps-fréquence de la statistique  $S_r^{\omega_j}$

Après le déroulement de l'algorithme séquentiel pour les sept fréquences constituant l'ensemble  $\{\omega_j = \frac{\pi}{20}(1 + 3(j - 1))\}_{j=1}^7$ , nous pouvons présenter d'une manière exhaustive les résultats des différents points de rupture identifiés sur la figure (4.4). Cette identification est représentée selon les deux axes temporel et fréquentiel.

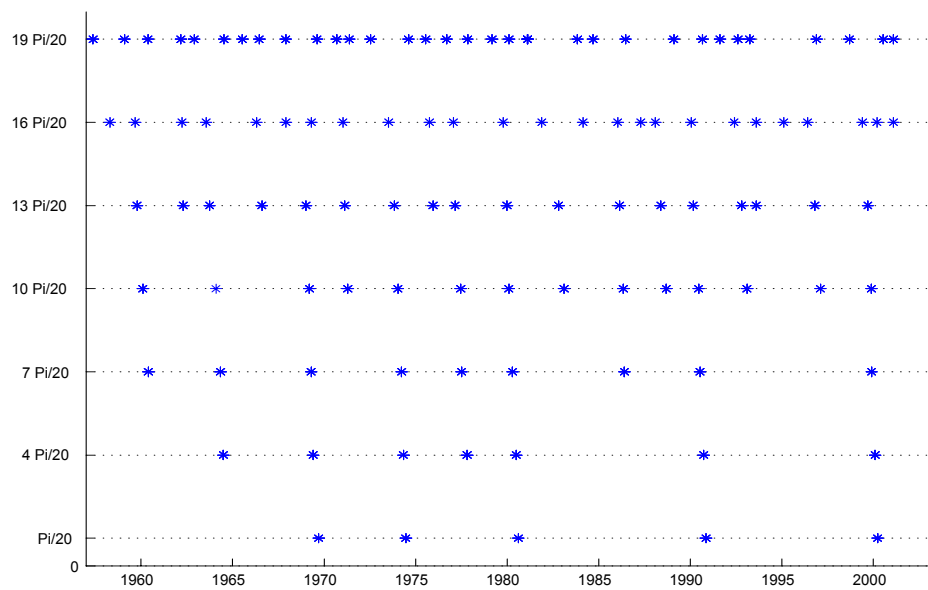


Figure (4.4) : Présentation de la totalité des points de rupture.

Il est prévisible et attendu que le nombre de points de rupture soit croissant en fonction des fréquences les plus hautes. Le graphique (4.5) reproduit le nombre total des points de rupture par fréquence.

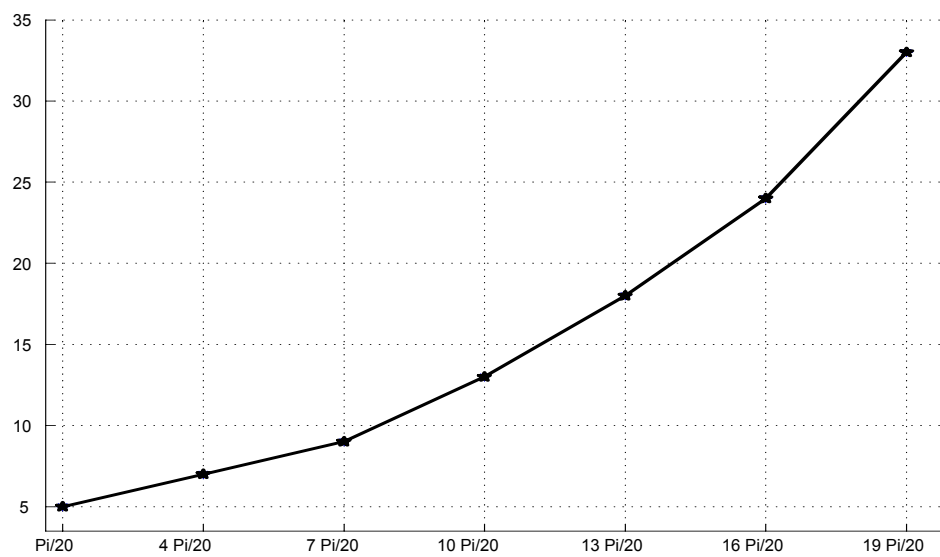


Figure (4.5) : Evolution du nombre de points de ruptures

Nous passons en revue les résultats relatifs à l'identification non-paramétrique des changements de régime dans le processus de l'inflation aux États-Unis de janvier 1946 à août 2001, par un test fondé sur l'instabilité de la densité spectrale évolutive que nous avons présenté ci-dessus.

Les résultats obtenus donnent à penser qu'ils sont très significatifs puisqu'ils coïncident avec des faits et des événements économiques assez importants. Les résultats nous montrent en particulier que la courbe de l'évolution de l'inflation aux États-Unis s'est aplatie durant les vingt dernières années puisque nous constatons que cette diminution de l'ampleur de l'inflation est stable et durable.

### **1.5 Aperçu historique des faits économiques du processus inflationniste américain**

À la fin de la deuxième guerre mondiale, la demande de biens et services dépasse le niveau de production qui à son tour, a baissé considérablement à cause de la guerre. En conséquence, les prix avaient tendance à augmenter. Cette inflation élevée et volatile a affaibli la capacité de l'économie américaine à maintenir des conditions propices à une expansion soutenue et à la création d'emplois. Une telle inflation a suscité des incertitudes chez les consommateurs et les investisseurs et a engendré de pénibles cycles de surchauffe et de contraction, qui ont occasionné des difficultés pour un bon nombre d'américains. La forte inflation que les États-Unis ont connue à la fin de la deuxième guerre a érodé la valeur des revenus et de l'épargne. Après la fin de la deuxième guerre mondiale, le retour à la croissance économique était progressif et la confiance a regagné le consommateur [voir Horsman (1988)].

La situation est restée stable relativement jusqu'à la fin des années soixantes et au début des années soixante-dix, dates auxquelles le niveau de l'inflation est de-

venu relativement élevé puisque l'inflation annuelle a monté progressivement de 2% à environ 10% à la fin des années soixante-dix. Aux États-Unis, comme en Grande-Bretagne, l'inflation a commencé à accélérer de rythme longtemps avant l'explosion des prix à l'importation. Pendant les années 60, l'administration du Président Johnson a largement poursuivi les politiques keynésiennes précédemment présentées par le Président Kennedy. Pendant plusieurs années, ces politiques semblaient globalement être couronnées de succès. La croissance de la productivité dans toute la première moitié des années 60 a été largement considérée comme satisfaisante et n'était jamais accompagnée par aucun degré sérieux d'inflation ou par aucune détérioration marquée de la balance de paiement. Au milieu de l'année 1966, une nouvelle contrainte excessive sur les ressources, exprimée par l'augmentation des dépenses pour la défense en liaison avec la guerre du Vietnam, commence à se faire ressentir à travers l'augmentation des taux d'intérêt. L'inflation américaine a continué à augmenter, laissant croire à une mini-récession. Par ailleurs, une croissance de 13% des importations entre le deuxième semestre de 1967 et le premier semestre de 1968 a contribué à une forte détérioration de la balance commerciale [voir Brown & Darby (1985)]. Cependant, l'élévation du taux d'escompte et la pression de la Réserve Fédérale sur les banques commerciales ne se sont pas montrées efficaces. Même l'augmentation d'impôts destinée à couvrir les dépenses militaires et les nouvelles hausses des taux d'intérêt, n'ont pas empêché l'inflation de continuer son augmentation pendant l'année 1969. Les prix à l'importation des États-Unis étaient en hausse de 2% par an alors que les exportations étaient pendant 1968-1970 au niveau le plus bas depuis la période d'après-guerre. Au même temps, une augmentation des salaires vient alourdir encore les dépenses publiques. Perry (1980) considère que pendant les années 1968-1971 le salaire horaire moyen, négocié par les syndicats, augmentait

plus rapidement que les prix à la consommation, sans que la croissance de la productivité suive proportionnellement le même rythme de progression. Brown & Darby (1985) attirait l'attention particulièrement à la pression salariale (*Wage-push*) et à l'accélération des dépenses à partir de 1968. De façon générale, un excédent de demande qui découle du contexte de guerre, semble avoir été la source principale de l'augmentation des salaires. On pensait que la réduction du niveau de la demande globale allait reproduire la stabilité des prix. Mais une partie importante de la main d'œuvre américaine, qui a négocié son salaire dans le cadre des contrats à long terme souvent d'une durée de trois ans, a favorisé la rigidité des prix à la baisse. De cette façon, les pressions inflationnistes ont continué à peser lourd sur l'économie américaine. En outre, une hausse énorme des importations de 40 milliards à 70 milliards a été enregistrée entre 1970 et 1973; ce qui a causé une détérioration conséquente du compte courant de la balance des paiements, qui est devenue dramatique à la fin de 1972.

En Août 1971, le président Nixon a annoncé des nouvelles mesures sans précédent dans l'histoire de la politique économique aux États-Unis. Ces mesures concernaient le contrôle quasi-total des prix et des salaires. L'adoption de ces mesures a justifié les soupçons grandissants depuis l'expérience des années 60 selon lesquels la capacité des politiques de gestion de la demande et de maîtrise de l'inflation sont devenues de moins en moins efficaces. Une autre raison, selon beaucoup d'auteurs tels que Blinder (1979) et Brown & Darby (1985), est le désir du président Nixon d'accroître sa popularité en rassurant le peuple américain quant à l'efficacité de la conduite et de la gestion du pays, dans l'espoir de gagner sa réélection en Novembre 1972. La fixation des prix a continué jusqu'en janvier 1973 où on a commencé à les libérer

mais, elle s'est poursuivie dans certains secteurs (notamment l'alimentaire, la santé et la construction). Cependant, les salaires étaient gelés sauf quelques exceptions et l'inflation a beaucoup accéléré en particulier pendant l'été 1973, [voir tableau (4.3)]. Et à partir d'août 1973, on a constaté un retour progressif à la flexibilité totale des prix qui s'est produit en avril 1974.

L'efficacité de la politique du contrôle des prix a fait l'objet d'une recherche empirique intense. Gordon (1973) constate que le contrôle des prix a évité entre 2 et 3,5% d'inflation jusqu'à janvier 1973, mais considère qu'à partir du milieu de l'année 1973, les prix se sont rattrapés par rapport au niveau qu'ils auraient atteint sans contrôle. Brosworth & Vroman (1977) estiment que ces mesures ont réduit environ 0,5% le taux annuel d'inflation. Nadiri & Gupta (1977) ont également montré une légère baisse des salaires et des prix alors que Blinder (1979) trouvait une baisse maximale de l'indice des prix à la consommation de 1,6%.

La période du contrôle des prix était accompagnée d'une augmentation de la demande stimulée par la politique fiscale expansionniste impliquant de grands déficits publics. Au quatrième trimestre de l'année 1973, l'OPEP a quadruplé le prix du pétrole que les États-Unis importaient massivement, provoquant à la fin 1974, des augmentations généralisées des prix de détail de l'énergie allant jusqu'à 47% et expliquant en partie l'accélération de l'inflation de cette période.

Années	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Chômage	5.0	6.0	5.6	4.9	5.6	8.5	7.7
Inflation	5.6	3.5	3.4	8.3	12.1	7.4	5.1
Revenu Horaire	6.6	6.7	6.6	6.3	9.1	7.4	7.3

Tableau<sup>7</sup> (4.3) : Indicateurs de l'Economie Américaine - en %

---

<sup>7</sup>Source : Clark (1985)



Les années 1980 et 1981 sont marquées par une vague de la désinflation que les États-Unis d'Amérique ont pu connaître sous le nom de "désinflation de Vockler" et qui a concerné une nouvelle conduite de la politique monétaire. En effet, avant les années 1970, les retombées des chocs réels sur l'économie sont considérées comme minimales. Les fluctuations considérables des prix du pétrole ont modifié ce point de vue et amené la Réserve Fédérale des États-Unis à réviser la mise en œuvre de la politique monétaire. Par ailleurs, il est à remarquer que la croissance inflationniste des années 70 a posé des problèmes énormes à l'économie américaine. En 1977, le chômage qui a été d'environ 7% [voir le tableau (4.4)], était suivi d'une augmentation des coûts de la main d'œuvre en 1978 et 1979 en raison de l'augmentation des taxes sur les salaires [voir le tableau (4.3)]. Par conséquent, la vague inflationniste s'est amplifiée surtout après la deuxième grande hausse des prix du pétrole brusquement produite entre 1979 et 1980 [voir le tableau (4.4)]. Ce dernier choc sur les prix du pétrole était causé essentiellement par les contraintes d'approvisionnement et par l'augmentation intensive de la demande mondiale.

Années	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Chômage	7.1	6.1	5.9	7.2	7.6	9.7
Inflation	6.6	9.0	12.8	12.5	9.6	4.5
Revenu Horaire	7.5	8.4	8.0	9.6	8.3	6.0

Tableau<sup>8</sup> (4.4) : Indicateurs de l'Économie Américaine - en %

Après l'année 1979, les politiques américaines ont semblé incarner la volonté de maîtriser l'inflation en exerçant des hausses de taux d'intérêt plus sensibles<sup>9</sup> que celles appliquées pendant les années 1974-75. Après l'avènement de Ronald Reagan au pouvoir en novembre 1980, les taux d'escompte ont été encore relevés pour

<sup>8</sup>Source : Clark (1985)

<sup>9</sup>Le taux d'escompte de la Réserve Fédérale a immédiatement progressé jusqu'à 12%.

atteindre les 14% en mai 1981. Les propositions fiscales du président sont nettement différentes des procédures mises en œuvre en 1974-75. Le Président Reagan a projeté de grandes réductions d'impôts. Les effets globaux de ces dernières mesures devraient conduire à la restauration de l'équilibre budgétaire fédéral d'ici 1984-85. L'année 1982, est marquée par la hausse du déficit fiscal alors que les taux d'intérêts sont à un niveau assez élevé tournant autour de 9% et le chômage a gardé la marge de 9% [voir le tableau (4.4)]. À partir de l'année 1983, l'économie américaine, favorisée par la baisse des prix du pétrole, par la réduction du taux de l'inflation à environ 5%, et par le ralentissement de l'augmentation des salaires, a renoué avec la croissance. Sous l'influence des taux d'intérêt élevés, le Dollar a contribué sensiblement à cette reprise économique en attirant massivement le flux des capitaux étrangers qui ont augmenté d'environ 30%.

Les États-unis se sont engagés, sous l'impulsion de la Fed dirigée par Paul Volcker, dans la voie de politique monétaire restrictive qui privilégie la stabilité des prix et la lutte contre l'inflation. La baisse du prix de l'énergie a également contribué à la baisse de l'inflation. On constate à partir de 1983 la conjonction d'une croissance régulière et d'une inflation faible.

Les décisions entreprises par Greenspan, le successeur de Volcker à la tête de la Réserve Fédérale ont eu leur part dans les événements historiques, puisqu'elles sont à l'origine de la conduite de la politique monétaire américaine. Par exemple, le 19 octobre 1987, c.à.d deux mois après l'arrivée de Greenspan à la Fed, la bourse a chuté de 22% – le plus grand plongeon d'une journée jamais enregistré. En réponse à cette chute, Greenspan a réagi en inondant l'économie avec la liquidité, en abaissant les taux d'intérêt et en évitant une récession. Mais, très vite l'inflation est devenue le souci majeur de la politique monétaire américaine. La Fed commence à réviser

plusieurs fois ses taux d'intérêt à la hausse. Par conséquent, les fonds fédéraux ont évolué de 6,7% en novembre 1987 avant d'atteindre les 9,8% en mai 1989, ce qui a poussé l'économie dans une récession l'année suivante. Cette récession a aidé l'avènement de Clinton au pouvoir, un gouverneur peu connu d'Arkansas, en battant Bush qui cumulait dans son bilan non seulement une récession économique mais en plus l'engagement des États-unis dans la guerre du Golfe.

Les années Clinton ont apporté leurs propres défis aux autorités monétaires. Les crises financières internationales au Mexique en 1994-95 et en Asie en 1997-98 ont placé le système financier mondial en péril et la Fed disposera d'un intérêt central. En même temps, la poussée des politiques fiscales a transformé le budget public des États-Unis d'une situation déficitaire à une situation excédentaire et a facilité le travail de la Fed. Ainsi, la croissance de la productivité a commencé à s'accélérer.

Au sujet de la conduite de la politique monétaire conjointement avec les performances macroéconomiques aux États-Unis pendant les années 90, Mankiw (2001b) tire quatre conclusions majeures. D'abord, les performances macro-économiques des années 90 sont exceptionnelles, particulièrement en ce qui concerne la baisse de la volatilité de la croissance, du chômage, et de l'inflation. En second lieu, une grande partie de ces bonnes performances est expliquée par le bon comportement de la composante de l'offre globale de l'économie et particulièrement concernant les prix des biens énergétiques [comme l'indique l'évolution<sup>10</sup> du prix des pétroles bruts sur la figure (4.6)], ce qui a conduit à une accélération inattendue de la croissance de la productivité.

---

<sup>10</sup>La stabilité du prix des pétroles étaient à un niveau très bas et presque parfaite à l'exception de l'augmentation des prix à la fin des années 1990. Par ailleurs, nous montrons sur le graphique (4.6) que cette flambée n'était pas en terme de prix réel de très grande ampleur.

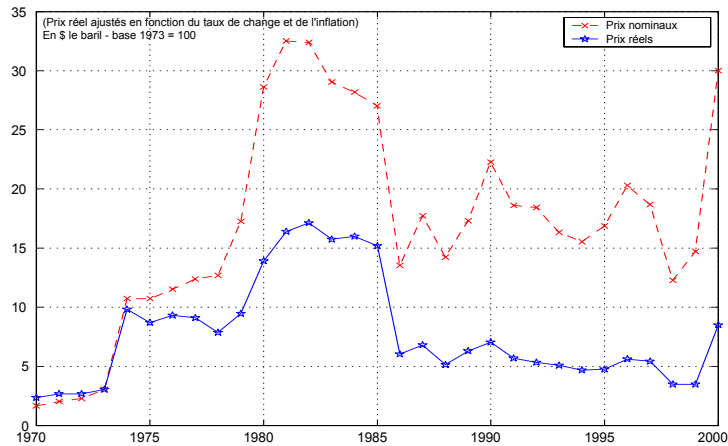


Figure (4.6) : Prix des pétroles bruts OPEP en valeur nominale et réelle

Troisièmement, les autorités monétaires ont rendu les taux d'intérêt plus sensibles à l'inflation ce qui n'était pas le cas dans des périodes précédentes. Quatrièmement, bien que les années 90 puissent être considérées comme exemple de la politique discrétionnaire réussie, il est très probable que les autorités monétaires à la Fed auraient considéré une cible implicite d'inflation à un taux d'environ 3%.

Décennie	1950	1960	1970	1980	1990
Inflation moyenne-en %	2.07	2.33	7.09	5.66	3.00
Écart type de l'inflation	2.44	1.48	2.72	3.53	1.12
Maximum d'inflation-en %	9.36	6.20	13.29	14.76	6.29
Date du maximum	février 50	décembre 69	décembre 79	mars 80	octobre 90

Tableau<sup>11</sup> (4.5) : Évolution de l'inflation américaine décennie par décennie

Le tableau (4.5) montre le niveau de l'inflation pendant les années 90 et les quatre décennies précédentes. La première ligne de ce tableau présente l'inflation moyenne pour chacune des décennies. La deuxième ligne expose l'écart type, qui est une mesure commune de volatilité. En ce référant aux taux d'inflation moyen, les années

<sup>11</sup>Source : Département américain du travail. Les taux d'inflation présentés dans ce tableau sont dérivés de l'indice des prix à la consommation (CPI).

90 n'étaient pas exceptionnelles. L'inflation était inférieure pendant les années 50 et les années 60 comparativement à son niveau des années 90. Cependant, les années 90 peuvent être considérées comme une décennie de faible inflation compte tenu de la sensible baisse enregistrée comparativement à ses niveaux atteints pendant les années 80 et particulièrement les années 70. Cette baisse du niveau de l'inflation est en grande partie le résultat des politiques dures de désinflation dirigées par Paul Volcker a mis en œuvre au début des années 80 : L'inflation a chuté d'un niveau de 14,8% en mars 1980 à 3,6% trois ans après. De même, il est à signaler que cette durable baisse d'inflation a été associée à une baisse temporaire de la production et à une hausse du chômage. La récession du début des années 80 était la plus grave depuis la grande dépression des années 30. Les années 90 sont considérées plus exceptionnelles une fois que nous tenons compte de l'écart type de l'inflation. La deuxième ligne du tableau (4.5) prouve que l'inflation était plus stable aussi bien pendant les années 90 que pendant n'importe quelle autre décennie récente. Les différences sont considérables en terme de grandeur des valeurs. L'inflation des années 90 est seulement d'un tiers aussi volatile qu'elle l'est pendant les années 80. Malgré que l'inflation moyenne a enregistré son niveau le plus faible pendant les années 50, la volatilité de l'inflation des années 90 est de 54% moins importante que celle des années 50. Il n'y a aucun doute que les années 90 étaient une décennie d'inflation remarquablement stable.

Une autre manière de considérer les données est d'examiner à quel point la mauvaise inflation était à son plus mauvais niveau. La troisième ligne du tableau (4.5) montre le taux d'inflation annuel le plus élevé enregistré au cours des 120 mois de chaque décennie. Par cette mesure, l'inflation était la plus faible pendant les années 60 et les années 90. Mais il y a une différence importante entre ces deux

périodes. Dans les années 60, le taux d'inflation le plus élevé s'est produit à la fin de la décennie, représentant le début d'un problème qui persisterait dans les années 70. En revanche, pendant les années 90, l'inflation atteint une pointe au début de la décennie pour se stabiliser ensuite à un niveau bas. Après janvier 1992, la volatilité de l'inflation a peu évolué permettant à peine une fluctuation de l'inflation dans un canal remarquablement étroit de 1,34% à 3,32%.

Décennie	1950	1960	1970	1980	1990
Chômage					
En moyenne	4.51	4.78	6.22	7.27	5.76
Écart type	1.29	1.07	1.16	1.48	1.05
Croissance du Produit intérieur Brut					
En moyenne	4.18	4.43	3.28	3.02	3.03
Écart type	3.89	2.13	2.80	2.68	1.56

Tableau<sup>12</sup> (4.6) : Évolution du chômage et de la croissance de l'économie américaine, décennie par décennie

Le tableau (4.6) représente des statistiques sommaires sur le chômage et la croissance économique pour chacune des cinq dernières décennies du vingtième siècle. Il expose le niveau moyen pendant la décennie et l'écart type comme mesure de volatilité. Comme le montre ce tableau, le niveau moyen du chômage pendant les années 90 était plus bas comparativement à son niveau pendant les deux décennies précédentes (bien que toujours plus haut que les années 50 et les années 60). Il n'y a aucun consensus parmi les économistes sur les raisons de cette baisse du chômage. Mankiw (2001b) explique cette baisse du chômage d'abord par l'organisation du marché de travail et au vieillissement de la main-d'œuvre. La génération *baby boom* a atteint l'âge moyen. Les travailleurs les plus âgés tendent à garder les emplois les

<sup>12</sup>Source : Département américain du travail. Les taux de chômage présentés dans ce tableau sont la moyenne des taux mensuels de la part des dépourvus de travail dans la population active (il s'agit de série désaisonnalisée) et les taux de croissance du PIB réel sont des taux de croissance déflatés et trimestriels du PIB.

plus stables alors que les plus jeunes satisfassent la part d'emplois la moins stable, ainsi il est normal de s'attendre à une baisse du chômage grâce à cette organisation naturelle de la demande du marché de travail. Alternativement, le même auteur argumente le déclin du chômage pendant les années 90 par l'accélération de la croissance de productivité qui est due aux avancées des technologies de l'information. Mais, peu d'économistes créditent l'hypothèse selon laquelle nous pouvons affirmer que nous devons la baisse du chômage à long terme à la politique monétaire. Les données sur la croissance économique prouvent que la croissance moyenne pendant les années 90 était semblable à celle enregistrée pendant les années 80 et inférieure sensiblement à celle réalisée pendant les années 50 et les années 60. Ce fait pourrait sembler étonnant à la lumière du surplus attendu grâce à la "*nouvelle économie*". Cependant, il est à remarquer que l'accélération de la croissance économique s'est produite au milieu de la décennie (1995 & 1996). D'une part, la croissance rapide de la deuxième moitié de la décennie et d'autre part, la récession et la croissance lente de la première moitié sont ramenées à une moyenne, la croissance globale pendant les années 90 n'est plus impressionnante.

Afin d'évaluer la politique monétaire, ce ne sont pas les moyennes au tableau (4.6) mais plutôt les écarts type. Ici, les statistiques indiquent une histoire saisissante : Le chômage et la croissance économique étaient plus stables pendant les années 90 que pendant n'importe quelle décennie récente. Le changement de la volatilité de la croissance du PIB est sensible. La production de l'économie était de 27% moins volatile pendant les années 90 qu'elle l'était pendant les années 60, le chômage était stable pendant les mêmes périodes. Ces statistiques révèlent le succès des autorités monétaires pendant les années 90. Comme nous avons vu plutôt, l'économie a apprécié la stable et faible volatilité de l'inflation. Nous pourrions nous demander si ce

succès était accompagné d'un coût. C'est-à-dire, a-t-on réalisé une inflation stable au détriment de la stabilité de l'emploi et de la croissance ? La réponse semble être non : L'économie est devenue plus stable dans chaque dimension. Naturellement, l'amélioration marquée par la stabilisation économique ne signifie pas nécessairement que c'est la résultante d'une meilleure efficacité des politiques monétaires. Peut-être ils étaient simplement chanceux...

## 2 Stabilité de la variance : Un Algorithme basé sur les Sommes Cumulatives (ICSS)

Cet algorithme a été proposé par Inclan & Tiao (1994) pour détecter les changements de régime de la variance d'un processus  $\{X_t\}$ . Il est basé sur plusieurs itérations éventuelles d'un test CuSum des carrés. Selon les auteurs qui ont appliqué la méthode sur l'instabilité de prix d'actifs financiers, cette technique fournit des résultats comparables aux approches Bayésiennes ou aux tests ratio de log-vraisemblance. Il s'agit d'une approche basée sur les sommes cumulées des carrés. Elle est basée sur une version centrée du CuSum présentée par Brown, Durbin & Evans (1975). Inclan & Tiao (1994) proposent un algorithme itératif pour identifier les différents points de changements de la variance.

### 2.1 Les Fondements

On considère  $\{X_t\}_{t=1}^T$  une série de  $T$  variables aléatoires indépendantes avec  $E(X_t) = 0$  et variances  $var(X_t) = \sigma_t^2$ . On pose pour chaque  $k = 1, \dots, T$ ,

$$C_k = \sum_{t=1}^k X_t^2 \text{ et } D_k = \frac{C_k}{C_T} - \frac{k}{T} \quad (4.18)$$

avec par convention  $D_0 = D_T = 0$ . Sous l'hypothèse nulle,  $H_0 : var(X_t) = \sigma^2$  (constante), la quantité  $\sqrt{\frac{T}{2}}D_k$  converge en distribution vers un mouvement Brownien



standard. Le point de changement de variance dans l'intervalle  $t = 1, \dots, T$ , est le point  $k_0$  où l'expression  $\sqrt{\frac{T}{2}}D_k$  atteint son maximum et  $\sqrt{\frac{T}{2}}D_{k_0} > C_\alpha$ .  $C_\alpha$  est une valeur critique, i.e.,  $\Pr(\max_k \sqrt{\frac{T}{2}}D_k > C_\alpha) = \alpha$ . On prendra la valeur critique à 5% calculée par les auteurs,  $C_{0.05} = 1.358$ . Dans le cas où plusieurs points de changement de régimes de la variance sont possibles, on peut avoir recours à une technique itérative pour repérer ces points, i.e., on examine  $D_k$  sur plusieurs intervalles en suivant le schéma suivant.

## 2.2 L'Algorithme

On adopte la notation  $X[t_1 : t_2]$  avec  $t_1 < t_2$ , pour désigner  $X_{t_1}, X_{t_1+1}, \dots, X_{t_2}$ . La notation  $D_k(X[t_1 : t_2])$  représentera l'expression  $D_k$  calculée à partir de la série  $X_{t_1}, X_{t_1+1}, \dots, X_{t_2}$ .

Étape (0) : on pose  $t_1 = 1$ .

Étape (1) : on calcule les  $D_k(X[t_1 : T])$ . Notons  $k^*(X[t_1 : T])$  le point où  $\max_k |D_k(X[t_1 : T])|$  est atteint. On pose :

$$M(t_1 : T) = \max_{t_1 \leq k \leq T} \sqrt{(T - t_1 + 1)/2} |D_k(X[t_1 : T])| \quad (4.19)$$

Si  $M(t_1 : T) > C_{0.05}$ , alors on peut considérer  $k^*(X[t_1 : T])$  comme point de rupture puis on procède à l'étape (2) que nous décrivons ci-dessous.

Si  $M(t_1 : T) < C_{0.05}$ , alors on peut considérer qu'il n'y a pas de changement de variance de la série et l'algorithme s'arrête.

Étape (2a) : On pose  $t_2 = k^*(X[t_1 : T])$ . On examine les  $D_k(X[t_1 : t_2])$  avec  $t_1 = 1$ .

Si  $M(t_1 : t_2) > C_{0.05}$ , alors nous avons un nouveau point de changement et on répète l'étape 2a jusqu'au point  $t_2$  où  $M(t_1 : t_2) < C_{0.05}$ . Si  $M(t_1 : t_2) < C_{0.05}$ , alors on peut considérer qu'il n'y a pas de changement de variance sur  $\{t_1, \dots, t_2\}$  donc le premier point de changement est  $k_{premier} = t_2$ .

Étape (2b) : On effectue le même type de recherche de manière similaire à l'étape (2a) mais sur l'autre partie de l'échantillon, i.e., on pose cette fois  $t_1 = k^*(X[t_1 : T]) + 1$  et on examine les  $D_k(X[t_1 : T])$ , i.e., on évalue les  $D_k$  entre le premier point de rupture et la fin de l'échantillon. Si  $M(t_1 : T) > C_{0.05}$ , alors il y a un autre point de rupture sur  $t = t_1, \dots, T$  et on répète (2b) jusqu'au point  $t_1$  où  $M(t_1 : T) < C_{0.05}$ . On pose  $k_{fin} = t_1 - 1$ , le dernier point de changement.

Étape (2c) : Si  $k_{premier} = k_{fin}$ , il n'y a qu'un seul point de rupture et l'algorithme s'arrête ici. Si  $k_{premier} < k_{fin}$ , on garde ces deux points comme possibles points de changement de variance et on répète les étapes (1) et (2) sur  $X[k_{premier} + 1 : k_{fin}]$ . Pour chaque application des étapes (2a) et (2b), on obtient un ou plusieurs points de changement en plus. Notons  $\hat{N}_T$  le nombre total des points de changement possible obtenus plus loin.

Étape (3) : S'il y a deux ou plusieurs points, nous les rangeons par ordre croissant dans un vecteur  $CP = (CP_0, \dots, CP_{\hat{N}_T+1})'$  avec la convention  $CP_0 = 0$  et  $CP_{\hat{N}_T+1} = T$  où  $\hat{N}_T$  désigne le nombre total des points de changement possible. Le but de cette dernière étape est de confirmer si un élément  $CP_j$  du vecteur  $CP$  peut être gardé comme point de changement structurel. Pour cela, pour chaque  $j = 1, \dots, \hat{N}_T$ , on examine les  $D_k(X[CP_{j-1} + 1 : CP_{j+1}])$ . Si  $M(CP_{j-1} + 1 : CP_{j+1}) > C_{0.05}$  alors le point capté peut être confirmé comme point de rupture, sinon on l'élimine. On répète l'étape 3 jusqu'à ce que les points de changement captés soient très proches d'une étape à l'autre et que leurs nombres soient invariables d'une étape à la suiv-

ante. Malgré les apparences, les auteurs confirment que cet algorithme<sup>13</sup> se boucle au bout de quelques itérations.

### 2.3 Application à l'Inflation aux États-Unis

Nous appliquons l'algorithme décrit ci-dessus aux données de l'inflation aux États-Unis<sup>14</sup>. Les conditions d'application de l'algorithme exigent l'hypothèse d'indépendance des données et les tests classiques<sup>15</sup> montrent qu'on peut raisonnablement maintenir une telle hypothèse avec la série d'inflation.

Étape (1) : L'algorithme démarre à l'étape (1) en examinant l'ensemble des données, i.e., entre  $t_1 = 1$  et  $T = 668$ . À l'issue de cette étape, le point  $k^* = 61$  apparaît comme possible point de changement [voir le graphique (4.7)]

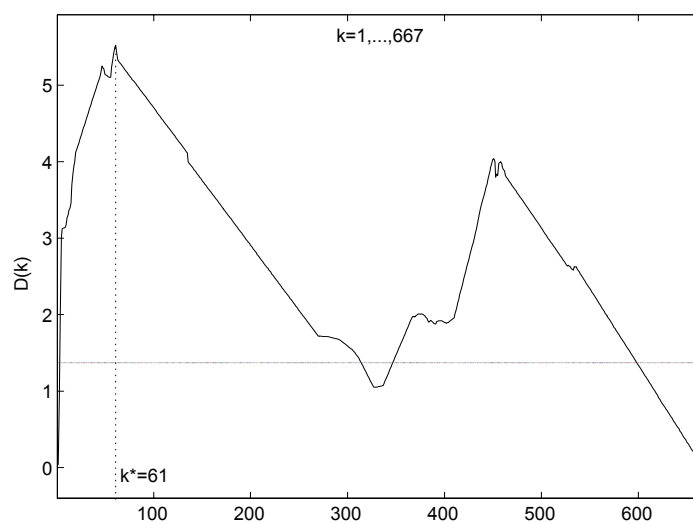


Figure (4.7) : Étape (1)

<sup>13</sup>Pour plus de précisions sur la description de cet algorithme, voir Inclan & Tiao (1994).

<sup>14</sup>Nous considérons les données de l'indice des prix à la consommation, CPI, (la série est désaisonnalisée). Nous utilisons les statistiques de la Réserve Fédérale de Saint Louis. Les données sont mensuelles et couvrent la période allant de Janvier 1946 jusqu'août 2001.

<sup>15</sup>Le test (BDS) proposé par Brock, Dechert & Scheinkman (1987) et appliqué aux données de l'inflation américaine, en utilisant la procédure de Ludwig Kanzler (University of Oxford) sur le logiciel Matlab, accepte l'hypothèse de l'indépendance.

Étape (2a) : L'étape (2a) consiste à examiner la série sur  $t = 1, \dots, 61$  et à l'issue de cette étape [voir les graphiques (2.8)], nous pouvons considérer  $k_{premier} = 10$  (pour  $k_{premier}$ , voir description ci-dessus).

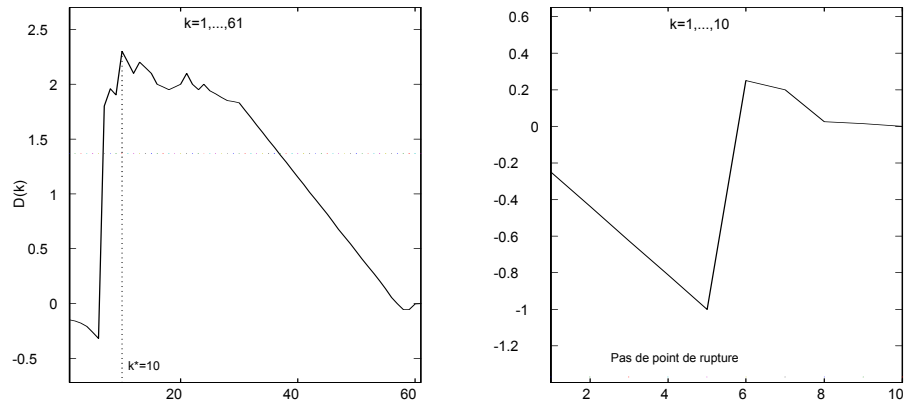
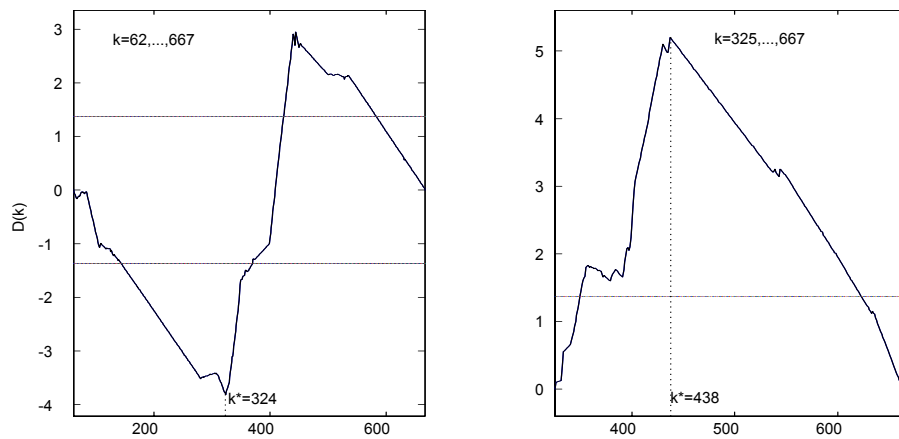


Figure (4.8) : Étape (2a)

Étape (2b) : Cette étape consiste à examiner la série sur  $t = 62, \dots, 668$  et à l'issue de cette étape, nous pouvons considérer  $k_{fin} = 540$ , [voir les graphiques (4.9)].



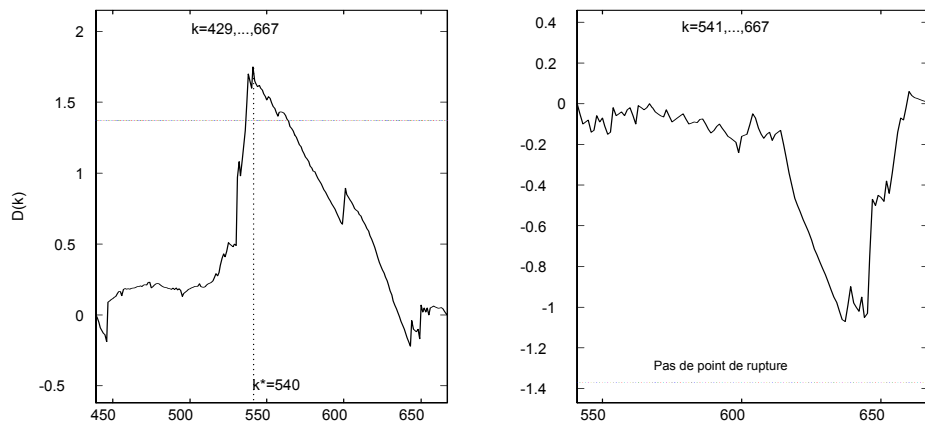


Figure (4.9) : Étape (2b)

Étape (2c) : Comme  $k_{premier} = 10 < k_{fin} = 540$ , nous passons à l'étape (2c), i.e., en appliquant de manière itérative les étapes (2a) et (2b) sur  $t = 11, \dots, 540$ . À l'issue de cette étape (2c), il en résulte le vecteur  $CP = \{0, 10, 61, 324, 428, 539, 668\}$ , [voir les graphiques (4.10)].

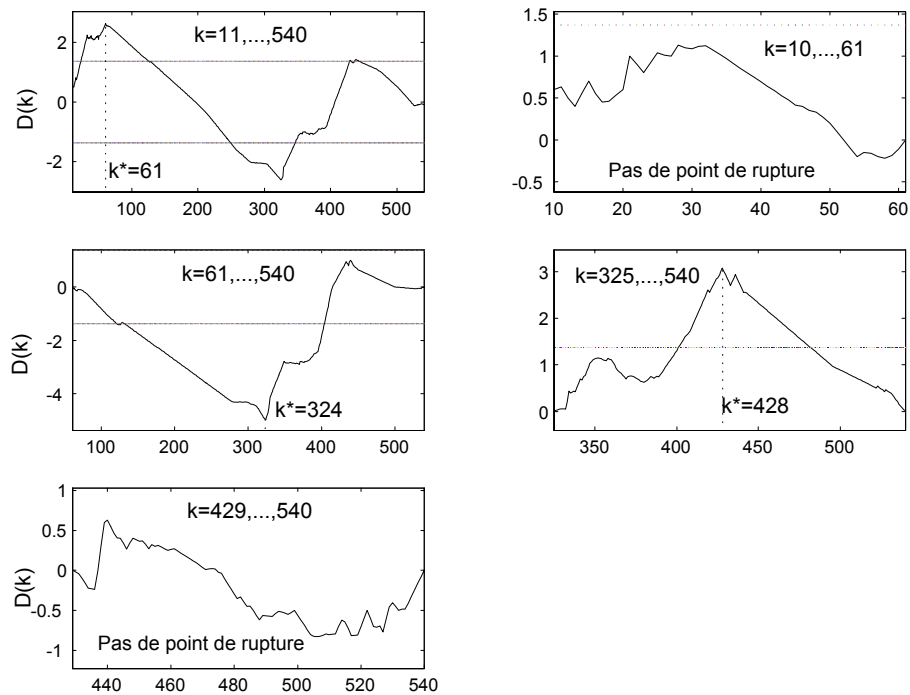


Figure (4.10) : Étape (2c)

Le but de la troisième et dernière étape est de confirmer si un élément  $CP_j$  du vecteur  $CP$  peut être gardé comme point de changement. Pour cela, il faut que le point  $CP_j$  apparaisse lorsqu'on examine la série sur  $t = CP_{j-1} + 1, \dots, CP_{j+1}$  avec la convention (ici  $\hat{N}_T = 5$ ). Les résultats de cette étape confirment les éléments de  $CP$  (à l'exception de  $CP_0 = 0$  et  $CP_6 = 668$ ) comme points de changement de la variance.

Dates		1946 :10 - 1951 :01 - 1972 :12 - 1981 :08 - 1990 :10
-------	--	--

Tableau. (4.7) : Résultats de l'algorithme ICSS

Nous n'avons pas présenté les figures correspondantes à l'étape (3), car elles coïncident presque toutes avec celles déjà présentées dans les précédentes étapes (1) et (2).

### 3 Stabilité de la moyenne

Par rapport au problème des tests de changement structurel, les contributions récentes les plus importantes sont les travaux d'Andrews (1993) et ceux d'Andrews & Ploberger (1994). Dans le même sens, les travaux de Bai (1994 & 1995) et Bai, Lumsdaine & Stock (1994) contiennent des résultats importants concernant la distribution asymptotique de l'estimation de la date de rupture lorsqu'un seul changement se produit.

Bien que la littérature soit vaste, les études qui se sont directement intéressées au problème relatif aux changements structurels multiples sont peu nombreuses. À cet effet, nous pouvons citer les travaux de Yao (1988), Yao & Au (1989) et Yin (1988) qui étudient l'estimation du nombre de changements dans la moyenne d'une séquence de variables utilisant le critère d'information de type Bayésien (BIC). Pour des modèles économétriques plus généraux, Garcia & Perron (1994) proposent un test de type Wald pour la présence de deux changements dans une série dynamique. Liu, Wu & Zidek (1995) considèrent des changements multiples dans le modèle linéaire estimé par moindres carrés et proposent un certain critère d'information pour la sélection du nombre de ruptures. Leurs résultats sont généralisés par Bai & Perron (1996) qui considèrent le problème d'estimation et d'inférence dans un modèle linéaire très général permettant la présence de plusieurs changements structurels. Bai & Perron (1997) discutent plus en détail les problèmes pratiques d'estimations et présentent des résultats de simulations sur les propriétés en petits échantillons d'estimateurs, de tests et de procédures de sélection du nombre de changements.

Nous poursuivons notre démarche d'identification des points de rupture multiples dans le processus de l'inflation américaine. Dans les deux premières sections de

ce chapitre, nous avons toujours supposé que la moyenne est stable. À présent, nous testons la stationnarité de la moyenne du processus inflationniste américain. Nous utilisons deux techniques : la première est celle des critères d'information et la seconde est celle des tests de Bai et Perron.

### 3.1 Le modèle de changement structurel

Nous considérons le modèle de changement structurel suivant :

$$y_t = z_t' \delta_i + u_t, \quad t = T_{j-1} + 1, \dots, T_j, \quad (4.20)$$

pour  $i = 1, \dots, m + 1$ ,  $T_0 = 0$  et  $T_{m+1} = T$ .  $y_t$  est la variable dépendante,  $z_t$ , ( $z_t \in \mathfrak{R}^q$ ), est le vecteur de régresseurs,  $\delta_j$  est le vecteur des coefficients et  $u_t$  est le terme d'erreur. Le paramètre  $m$  est le nombre des ruptures. Les dates de rupture ( $T_1, \dots, T_m$ ) sont considérées comme inconnues.

On appelle une  $m$ -partition des entiers  $(1, \dots, T)$  un vecteur de dimension  $m$  d'entiers  $(T_1, \dots, T_m)$ , qu'on notera  $\{T_i\}$ , tels que  $1 < T_1 < \dots < T_m < T$ . Soit la matrice bloc-diagonale  $\bar{Z} = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_{m+1})$  avec  $Z_i = (z_{T_{i-1}+1}, \dots, z_{T_i})'$ . La forme compacte matricielle de la régression (4.20) est comme suit :

$$Y = \bar{Z}\delta + U, \quad (4.21)$$

avec  $Y = (y_1, \dots, y_T)'$ ,  $U = (u_1, \dots, u_T)'$  et  $\delta = (\delta_1', \dots, \delta_{m+1}')'$ . On note par  $(T_1^0, \dots, T_m^0)$  les vraies dates de rupture. En particulier,  $\bar{Z}^0$  est la partition de  $Z$  à la  $m$ -partition  $(T_1^0, \dots, T_m^0)$ . Donc,  $Y = \bar{Z}^0 \delta^0 + U$  constitue le processus générateur de données. On cherche à estimer les coefficients inconnus et les dates de rupture  $(\delta_1^0, \dots, \delta_{m+1}^0, T_1^0, \dots, T_m^0)$  lorsque  $T$  observations sur  $(y_t, z_t)$  sont disponibles et en supposant que  $\delta_i^0 \neq \delta_{i+1}^0$



( $1 \leq i \leq m$ ). On n'a pas imposé la restriction selon laquelle la fonction de régression est continue aux points de rupture.

La méthode d'estimation proposée par Bai & Perron (1998) est fondée sur le principe des moindres carrés. Pour chaque  $m$ -partition  $(T_1, \dots, T_m)$ , notée  $\{T_i\}$ , les estimations de moindres carrés associées de  $\delta_i$  sont obtenues en minimisant la somme des résidus au carré :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{t=T_{i-1}+1}^{T_i} \left( y_t - z_t' \delta_i \right)^2 \quad (4.22)$$

Soient  $\widehat{\delta}(\{T_i\})$  les estimations résultantes. La somme des carrés des erreurs correspondant à ces estimations est donc :

$$S_T(T_1, \dots, T_m) = \left( Y - \overline{Z} \widehat{\delta}(\{T_i\}) \right)' \left( Y - \overline{Z} \widehat{\delta}(\{T_i\}) \right). \quad (4.23)$$

Les points de rupture estimés  $(\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m)$  sont définis tels que :

$$\left( \widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m \right) = \arg \min_{(T_1, \dots, T_m)} S_T(T_1, \dots, T_m), \quad (4.24)$$

où la minimisation est effectuée sur toutes les partitions  $(T_1, \dots, T_m)$  telles que  $T_i - T_{i-1} \geq q$ . Les estimations des points de rupture sont donc des minimisations globales de la fonction objective  $S_T(T_1, \dots, T_m)$ . Les estimateurs des coefficients de régression sont simplement les estimations *MCO* obtenues en utilisant la  $m$ -partition  $\{\widehat{T}_i\}$ . C'est-à-dire,  $\widehat{\delta} = \widehat{\delta}(\{\widehat{T}_i\})$ . Comme les dates de rupture sont des variables discrètes, il est alors possible d'obtenir les minimiseurs globaux (les solutions du système (4.24)) par un balayage exhaustif par rapport à toutes les partitions possibles. Lorsque  $m > 2$ , cette méthode devient rapidement excessive en temps de calcul puisque le nombre possible de  $m$ -partitions est d'ordre  $T^m$ . Nous utilisons alors une

méthode efficace basée sur les principes de la programmation dynamique permettant d'obtenir des minimiseurs globaux en effectuant des MCO d'ordre  $O(T^2)$ , quel que soit  $m \geq 2$ .

## 3.2 Procédures d'identification

### 3.2.1 Les critères d'information

Les critères d'information constituent des procédures de choix de la dimension d'un modèle. L'idée de base est que l'ajout de points de rupture diminue nécessairement la somme des résidus au carré de la régression. La pénalisation de l'ajout de chaque point de rupture additionnel paraît une bonne alternative. Cette pénalisation doit être suffisamment sévère pour limiter l'estimation  $\hat{m}$  de  $m$ . Mais, elle doit aussi forcer  $\hat{m}$  à converger rapidement vers la vraie valeur de  $m$  pour assurer les propriétés asymptotiques de toutes les autres estimations qui dépendent de  $\hat{m}$ . Une pénalité sévère est essentielle pour la spécification correcte d'un modèle de régression non Gaussien. Le critère de Schwarz a été obtenu sous l'hypothèse de normalité par Yao (1988).

Les critères de sélection que nous allons utiliser dans cette partie diffèrent essentiellement par le facteur de pénalité. Dans le cadre des modèles avec instabilité structurelle dans la moyenne, Schwarz (1978) propose un critère d'information de la forme suivante :

$$SIC(m) = \ln \left( S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m \right) / (T - m) \right) + 2p^* \ln(T) / T. \quad (4.25)$$

où,  $p^* = (m + 1)q + m$ . L'estimateur  $\hat{m}_{SIC}$  peut s'écrire comme suit :

$$\hat{m}_{SIC} = \arg \min_m SIC(m) \quad (4.26)$$

Yao (1988) a suggéré l'utilisation du critère d'information de type Bayésien défini par :

$$BIC(m) = \ln \left( S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m \right) / T \right) + p^* \ln(T) / T \quad (4.27)$$

L'estimateur  $\hat{m}_{BIC}$  du nombre de ruptures est tel que :

$$\hat{m}_{BIC} = \arg \min_m BIC(m) \quad (4.28)$$

Le critère proposé par Yao & Au (1989) prend la forme suivante :

$$YIC(m) = \ln \left( S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m \right) / T \right) + mC_T/T \quad (4.29)$$

où  $\{C_T\}$  est une suite satisfaisant  $C_T T^{-2/n} \rightarrow \infty$  et  $C_T/T \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

La suite  $\{C_T\}$  doit être choisie telle que les moments d'ordre  $2n$  ( $n \geq 3$ ) du terme d'erreurs soient finis<sup>16</sup>. L'estimateur minimisant ce critère est le suivant :

$$\hat{m}_{YIC} = \arg \min_m YIC(m)$$

Liu, Wu & Zidek (1997) ont proposé une modification de ce critère de la forme :

$$MIC(m) = \ln \left( S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m \right) / (T - p^*) \right) + p^* c_0 [\ln(T)]^{2+\delta_0} / T \quad (4.30)$$

dont l'estimateur correspondant est :

$$\hat{m}_{MIC} = \arg \min_m MIC(m) \quad (4.31)$$

---

<sup>16</sup>Liu, Wu et Zidek (1997) ont proposé l'utilisation de la séquence  $C_T = 0.368T^{0.7}$ .

Les auteurs de ce critère ont choisi leur facteur de pénalité de la forme  $p^*c_0 [\ln(T)]^{2+\delta_0} / T$  conformément aux résultats de leur étude de simulations. Ils ont suggéré l'utilisation des valeurs  $\delta_0 = 0.1$  et  $c_0 = 0.299$  après avoir étudié la performance de  $\hat{m}_{MIC}$  lors de certaines expériences de simulations avec divers modèles. Ils démontrent que l'estimateur  $\hat{m}_{MIC}$  converge vers la vraie valeur  $m^0$ .

Nous utilisons les données mensuelles désaisonnalisées du taux d'inflation américaine allant de janvier 1956 à septembre 2002. Nous considérons l'indice des prix à la consommation selon les statistiques de la Réserve Fédérale de Saint-Louis. Nous appliquons tous les critères d'information cités ci-dessous. Tous indiquent un minimum correspondant à 3 ruptures.

Nombre de rupture	BIC	MIC	SIC	YIC
0	-2.9203	-2.9167	-2.9202	-2.9203
1	-2.9662	-2.9140	-2.9305	-2.9449
2	-3.0410	-2.9401	-2.9696	-2.9985
3	-3.0939	-2.9444	-2.9868	-3.0302
4	-3.0850	-2.8867	-2.9422	-3.0001
5	-3.0578	-2.8108	-2.8793	-2.9516

Tableau (4.8) : Résultats des critères d'information

Le cadre structurel de base est la décomposition standard d'une série entre fonction de tendance déterministe et partie stochastique (si on fait abstraction de composantes saisonnières), c'est à dire :

$$\pi_t = \tau' d_t + \nu_t \quad (4.32)$$

où habituellement,  $d_t = \{1\}$ , (moyenne non nulle sans croissance) et  $d_t = \{1, t\}$ . Étant donné la nature de la plupart des séries macroéconomiques, il est important de permettre la corrélation temporelle dans la partie stochastique  $\nu_t$  et en particulier,

la possibilité d'une racine autorégressive unitaire, [voir Bai (1997)]. Pour ce faire, nous adoptons un simple modèle autorégressif d'ordre 1,  $AR(1)$  tel que :

$$\nu_t = \alpha\nu_{t-1} + e_t \tag{4.33}$$

avec,  $e_t \sim i.i.d N(0, 1)$ . La question d'intérêt est de savoir si le vecteur de coefficients  $\tau$  est stable ou non et dans le dernier cas d'estimer le nombre de changements présents. Nous obtenons les localisations temporelles pour les trois points de rupture comme suit :

Estimateurs	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_3$
Dates de rupture	1967 :5	1973 :9	1982 :6
95% Int. Conf.	(1966 :3-1967 :11)	(1973 :3-1975 :3)	(1981 :7-1982 :12)

Tableau (4.9) : Localisation des dates de rupture

### 3.2.2 Variété de tests de Bai & Perron (1998)

Le but est le même que celui visé par la méthode des critères d'information et consiste à estimer les coefficients inconnus de la régression et les dates de ruptures  $(\delta_1, \dots, \delta_{m+1}, T_1, \dots, T_m)$ . Nous supposons que  $\lambda_i = T_i/T$  avec  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < 1$ . Nous reprenons l'équation (4.21) :

$$Y = \bar{Z}\delta + U,$$

avec  $Y = (y_1, \dots, y_T)'$ ,  $\bar{Z}$  est la matrice diagonale des partitions de  $Z$  à la  $m$ -partition  $(T_1, \dots, T_m)$ , i.e.,  $\bar{Z} = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_{m+1})$  avec  $Z_i = (z_{T_{i-1}+1}, \dots, z_{T_i})'$ ,  $\delta = (\delta'_1, \dots, \delta'_{m+1})'$ , et  $U = (u_1, \dots, u_T)'$ . Bai & Perron (1998) imposent quelques restrictions aux valeurs possibles des dates de rupture. En effet, ils définissent l'ensemble suivant par rapport à une petite quantité positive arbitrairement choisie  $\varepsilon$  :

$\Lambda_\varepsilon = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m); |\lambda_{i+1} - \lambda_i| \geq \varepsilon, \lambda_1 \geq \varepsilon, \lambda_m \leq 1 - \varepsilon\}$  pour que chaque date de rupture soit asymptotiquement distincte.

### 3.2.2.1 Test de stabilité structurelle contre un nombre connu de changements

Dans un premier temps, Bai & Perron (1998) considèrent un test de type sup  $F$  de stabilité structurelle contre une hypothèse alternative d'existence d'un nombre fini et connu de  $n$  ruptures :

$$F_T(\lambda_1, \dots, \lambda_n, q) = \frac{1}{T} \left( \frac{T - (n+1)q}{nq} \right) \widehat{\delta}' R' \left( R \widehat{V}(\widehat{\delta}) R' \right)^{-1} R \widehat{\delta} \quad (4.34)$$

où  $R$  est la matrice telle que  $(R\delta)' = (\delta'_1 - \delta'_2, \dots, \delta'_n - \delta'_{n+1})$ , et  $\widehat{V}(\widehat{\delta})$  est une estimation de la matrice variance-covariance de  $\widehat{\delta}$ . Soit :

$$V(\widehat{\delta}) = p \lim T \left( \overline{Z}' \overline{Z} \right)^{-1} \overline{Z}' \Omega \overline{Z} \left( \overline{Z}' \overline{Z} \right)^{-1} \quad (4.35)$$

où  $\Omega = E(UU')$ . Le test de type sup  $F$  de stabilité structurelle est défini alors comme suit :

$$\sup F_T(n; q) = \sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon} F_T(\lambda_1, \dots, \lambda_n; q) = F_T(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n; q) \quad (4.36)$$

où les estimations des fractions de rupture  $(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n)$  minimisent la somme globale des carrés des résidus. Différentes versions de ce test peuvent être obtenues selon les hypothèses faites en ce qui concerne la distribution des régresseurs et les erreurs.

### 3.2.2.2 Test de stabilité structurelle contre un nombre inconnu de changements

Bai & Perron (1998) considèrent aussi un test de stabilité structurelle contre un nombre inconnu de changements structurels en fixant une limite supérieure à ce nombre  $M$  pour  $m$ . Cette nouvelle classe de tests est définie comme suit :

$$D \max F_T(M, q, a_1, \dots, a_M) = \max_{1 \leq m \leq M} a_m \sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_\varepsilon} F_T(\lambda_1, \dots, \lambda_m; q) = \max_{1 \leq m \leq M} a_m \left( \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m; q \right) \quad (4.37)$$

avec  $\{a_1, \dots, a_M\}$  un ensemble de poids fixes. D'abord, nous initialisons tous les poids à l'unité, i.e.  $a_m = 1$  et nous appelons cette version du test  $UD \max F_T(M, q)$ . Ensuite, cet ensemble de poids sera réajusté de cette manière :  $a_1 = 1$  et  $a_m = c(q, \alpha, 1) / c(q, \alpha, m)$ , pour  $m > 1$ , où  $\alpha$  est le niveau de signification du test et  $c(q, \alpha, m)$  est la valeur critique asymptotique du test  $\sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_\varepsilon} F_T(\lambda_1, \dots, \lambda_m; q)$ . Cette version du test est alors notée comme  $WD \max F_T(M, q)$ .

### 3.2.2.3 Test séquentiel

Le dernier test développé par Bai & Perron (1998) est le test séquentiel de  $l$  contre  $(l + 1)$  changements structurels :

$$\sup F_T(l + 1|l) = \left\{ S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_l \right) - \min_{1 \leq i \leq l+1} \inf_{\tau \in \Lambda_{i,\varepsilon}} S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_{i-1}, \tau, \hat{T}_i, \dots, \hat{T}_l \right) \right\} / \hat{\sigma}^2 \quad (4.38)$$

où,

$$\Lambda_{i,\varepsilon} = \left\{ \tau; \hat{T}_{i-1} + \left( \hat{T}_i - \hat{T}_{i-1} \right) \varepsilon \leq \tau \leq \hat{T}_i - \left( \hat{T}_i - \hat{T}_{i-1} \right) \varepsilon \right\} \quad (4.39)$$

et  $S_T \left( \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_{i-1}, \tau, \hat{T}_i, \dots, \hat{T}_l \right)$  est la somme des carrés des résidus qui découle de l'estimation des moindres carrés à partir de chaque  $m$ -partition  $(T_1, \dots, T_m)$ , et  $\hat{\sigma}^2$

est un estimateur consistant de  $\sigma^2$  sous l'hypothèse nulle.

Les distributions asymptotiques de ces trois tests sont proposées par Bai & Perron (1998) et les valeurs critiques asymptotiques sont présentées par Bai & Perron (1998 et 2003b) : Pour  $\varepsilon = 0.05$  ( $M = 9$ ),  $0.10$  ( $M = 8$ ),  $0.15$  ( $M = 5$ ),  $0.20$  ( $M = 3$ ), et  $0.25$  ( $M = 2$ ).

$\sup F_T(1)$	$\sup F_T(2)$	$\sup F_T(3)$	$\sup F_T(4)$	$\sup F_T(5)$	$UD \max$
53.22	41.75	51.30	46.47	38.83	53.22
(12.25)	(10.58)	(9.29)	(8.37)	(7.62)	(12.59)
$WD \max$	$\sup F_T(2 1)$	$\sup F_T(3 2)$	$\sup F_T(4 3)$	$\sup F_T(5 4)$	
68.01	59.43	44.33	17.65	4.52	
(13.66)	(13.83)	(14.73)	(15.46)	(16.13)	

Tableau (4.10) : Résultats d'identification du nombre de rupture

La stratégie préférable pour déterminer le nombre de rupture dans l'ensemble des données consiste d'abord analyser les tests  $UD \max F_T(M, q)$  ou  $WD \max F_T(M, q)$ . Le but de cet examen est de savoir si au moins une rupture structurelle existe [voir le tableau (4.10)]. Nous pouvons alors identifier le nombre exact de ruptures en se référant aux différentes valeurs de la statistique du troisième test  $\sup F_T(l+1|l)$ . Bai & Perron (2003a) concluent que cette méthode garantit des meilleurs résultats et qu'elle est recommandée pour les applications empiriques. Nous sélectionnons  $m$  ruptures quand la statistique du test  $\sup F_T(l+1|l)$  devient non significative pour la première fois (i.e.,  $l = m$ ). Sur le tableau (4.10), cela se produit pour la première fois avec la statistique  $\sup F_T(5|4)$ . Nous choisissons alors  $m = 4$  comme estimation du nombre de rupture.

Estimateurs	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_3$	$\hat{T}_4$
Ruptures	1967 :5	1973 :9	1981 :9	1990 :10
Inter. conf.	(1966 :4-1967 :11)	(1973 :4-1975 :2)	(1980 :2-1982 :6)	(1987 :12-1993 :3)

Tableau (4.11) : Tableau des résultats des tests de Bai et Perron



Les dates de changement ainsi que les intervalles de confiance sont présentés dans le tableau (4.11). Ces intervalles de confiance à 95% sont obtenus en utilisant la distribution asymptotique proposée par Bai & Perron (1998).

En comparant l'ensemble des résultats obtenus selon l'approche des critères d'information et l'approche des tests de Bai et Perron, il en ressort que le test de Bai et Perron semble être plus sensible puisqu'il se distingue de celui des critères d'information en identifiant une quatrième rupture localisée au début des années 90. Il est à remarquer aussi que les deux premières ruptures identifiées par les critères d'information sont précisément détectées par le test de Bai et Perron. La rupture de juin 1982 obtenue par les critères d'information se situe à la limite de l'intervalle de confiance de la date de septembre 1981 détectée par le test de Bai et Perron.

## Conclusion

Dans ce chapitre, la question de l'instabilité du processus de l'inflation américaine a été soumise à un examen minutieux basé sur deux méthodes d'analyse. Les données ont été longuement examinées dans les deux domaines temporel et fréquentiel. Cette étude est justifiée par le manque d'unanimité sur l'évidence empirique concernant l'instabilité. Le test d'instabilité appliqué à la densité spectrale a l'avantage de pouvoir attribuer aux ruptures détectées différentes fréquences pouvant nous renseigner sur le terme de l'instabilité (court, moyen ou long terme). Par ailleurs, nous avons appliqué l'algorithme itératif ICSS afin d'identifier l'ensemble des accidents survenus dans la série de l'inflation américaine depuis la fin des années 50. Les résultats obtenus dans les deux approches sont très significatifs puisqu'ils coïncident avec des faits et des événements économiques importants. La seule rupture détectée à laquelle des fréquences de long terme sont attribuées semble coïncider avec l'année

1981. En dehors de cette date, nous avons enregistré d'autres points de changement de régime mais à l'exception de l'année 1975 à laquelle des fréquences de moyen terme sont attribuées, le reste des dates détectées correspond à des variations passagères de l'inflation. D'autre part, une interprétation possible des dates retenues par les tests a été proposée. Il est à noter enfin que les méthodes utilisées dans ce chapitre sont non paramétriques, en conséquence, l'efficacité de leurs mises en œuvre a nécessité l'emploi d'échantillons de grande taille.

## Troisième partie

# Essais Empiriques sur la Courbe Néo-Keynésienne de Phillips<sup>17</sup>

---

<sup>17</sup>La cinquième chapitre est issu du travail de Ben Aïssa & Musy (2004c). Je dois l'idée et l'intuition de cet article à Alessandra Casella que je remercie beaucoup.

## Chapitre 5

# Régime Monétaire & Stabilité des Paramètres de la Courbe de Phillips Hybride

### Introduction

L'inflation américaine a été stable et faible au cours des années 60, puis s'est accrue au cours des années 70, avec un pic à 11.8% au milieu de la décennie. L'arrivée de Paul Volcker à la tête de la Réserve Fédérale en 1979 a été suivie d'une politique de désinflation efficace, le taux d'inflation passant de 10.8% en 1980 à 3% en 1983, puis restant faible durant le reste de la décennie. Au cours des années 90, l'inflation est restée globalement stable dans une fourchette allant de 1 à 3%, ce qui englobe la plupart des définitions de la stabilité des prix. Il existe donc un consensus sur le fait que la performance macroéconomique des États-Unis s'est sensiblement améliorée à partir des années 80. La raison la plus fréquemment évoquée est celle d'un changement de comportement de la banque centrale américaine, qui a poursuivi au début des années 80 une politique agressive de désinflation puis a cherché à conserver la stabilité des prix acquise. Goodfriend (2003) qualifie cette politique de cible d'inflation implicite. La crédibilité de la Réserve Fédérale à poursuivre une

politique d'inflation basse s'est progressivement accrue, notamment suite à l'arrivée d'Alan Greenspan en 1987. Le niveau d'inflation ciblé n'est pas explicite du point de vue quantitatif. Le but à atteindre étant celui de la stabilité des prix, définie par Greenspan (1990) comme une situation durant laquelle "le taux d'évolution anticipé du niveau général des prix cesse d'être un facteur de décision dans les choix des individus et des firmes".

Du point de vue théorique, la reproduction de la dynamique de l'inflation se fait le plus souvent à l'aide des courbes de Phillips néo-keynésiennes [voir Clarida, Galí & Gertler (1999)]. L'inflation y est représentée comme un phénomène totalement tourné vers le futur ("*forward-looking*"), en raison du comportement optimisateur de firmes faisant face à des contraintes dans les ajustements des prix. Pour cette raison, ces modèles ont des difficultés à reproduire correctement la persistance de l'inflation [voir Fuhrer & Moore (1995)] ainsi que la réponse de l'inflation et du produit à certains chocs monétaires [voir Mankiw (2001) et Mankiw & Reis (2002)]. Dans ce type d'équation, la persistance provient uniquement du processus de la variable pilote. Comme le notent Fuhrer (1997), Taylor (1999) ou Mankiw & Reis (2002), cette propriété n'est pas désirable et pose divers problèmes. Les courbes de Phillips traditionnelles, dans lesquelles l'inflation est exclusivement dépendante de ses valeurs passées "*backward-looking*", ont un pouvoir prédictif plus satisfaisant, mais outre les critiques traditionnelles qui existent sur le plan théorique, il semble que leurs performances empiriques récentes soient moins bonnes [voir Gordon (1997)]. La recherche s'est donc portée sur l'étude de courbes hybrides incorporant à la fois des éléments tournés vers le futur, issus de la modélisation des nouvelles courbes de Phillips, et des éléments tournés vers le passé dont la présence permet de reproduire la persistance empirique de l'inflation.

Plusieurs études récentes suggèrent que la persistance de l'inflation s'est modifiée au cours du temps aux États-Unis. Benati (2002) détecte plusieurs modifications des propriétés dynamiques de l'inflation au cours de l'histoire monétaire des États-Unis. Chacune de ces modifications est associée à une modification du régime monétaire en place. Ball (2000) montre que le degré de persistance de l'inflation américaine était très faible durant le régime monétaire précédant la première guerre mondiale et beaucoup plus élevé lors du régime postérieur à la seconde guerre mondiale. Même durant cette période, il semble que le degré de persistance ait été variable. Cogley & Sargent (2001) montrent que la persistance s'est accrue au début des années 70, et qu'elle est restée stable au cours de cette décennie avant de décroître graduellement à partir des années 80. Levin & Piger (2004) obtiennent des résultats similaires. La variation historique de la persistance reste néanmoins ouverte au débat, car Pivetta & Reis (2004) trouvent au contraire que le degré de persistance est globalement stable depuis l'après guerre.

Le travail que nous menons se situe en parallèle de cette littérature. Il consiste à étudier l'évolution de la persistance en fonction de l'évolution des coefficients estimés de la courbe de Phillips hybride fondée sur la modélisation de Galí & Gertler (1999). Nous estimons les coefficients pour chaque régime monétaire, en utilisant les données américaines de 1960 à 1998. Certains auteurs ont perçu la modification de la persistance comme résultant uniquement de la modification du processus dynamique de la variable pilote [voir Clarida, Galí & Gertler (2000)]. Nous essayons de voir si les modifications survenues dans la conduite de la politique monétaire ont également affecté les paramètres de la courbe de Phillips, supposant une réaction endogène des agents au régime monétaire.

Nos résultats révèlent qu'une partie de la diminution de la persistance constatée à

partir du début des années 80 peut s'expliquer par une modification du mécanisme de propagation ; Les agents adoptent un comportement plus prospectif qu'auparavant. Cette persistance moindre ne provient pas d'une modification du degré d'imbrication des contrats, comme le suggère par exemple Willis (2003), mais plutôt de la proportion d'agents adoptant un comportement prospectif. Le lien entre ce paramètre et la politique monétaire n'est pas spécifié dans les modèles néo-keynésiens actuels mais son évolution nous semble compatible avec les effets intuitifs attendus suite à la mise en place d'une politique de cible d'inflation implicite.

Le second apport de notre travail est de montrer que la poursuite d'une cible implicite peut avoir un impact en deux étapes sur le comportement des agents. En effet, si la période postérieure à l'arrivée de Volcker est caractérisée par un comportement largement plus prospectif de la part des agents, elle peut elle-même être découpée en deux sous périodes, la fraction d'agents tournés vers le futur connaissant une nouvelle rupture, cette fois à la hausse, à partir de 1990. Une raison possible est liée au fait que la cible d'inflation de la Réserve Fédérale ne soit pas numériquement explicite, créant une légère zone d'incertitude concernant le comportement futur de l'inflation. Tant que l'inflation reste dans cette zone représentant la définition large de la stabilité des prix, certains agents peuvent avoir recours de nouveau à un comportement adaptatif. La conclusion est que le paramètre clé que représente la répartition des agents selon leur règle de fixation des prix doit être endogénéisé afin de connaître l'intégralité du processus de décision des agents, alors que ce paramètre est toujours déterminé de manière exogène dans la littérature néo-keynésienne. Les résultats des exercices de politique monétaire récents consistant à analyser l'impact de règles monétaires alternatives en supposant un modèle hybride structurel sont donc biaisés et potentiellement invalides.

Ce chapitre est construit de la manière suivante : dans la section 1, nous rappelons la courbe de Phillips proposée par Galí et Gertler et nous discutons des paramètres du modèle. Dans la section 2, nous testons la stabilité des paramètres en étudiant d'abord deux sous périodes : La première allant de 1961 à 1981 et la seconde allant de 1982 à 1998. Nous concluons à l'instabilité d'un des paramètres du modèle. Ensuite, nous divisons la période allant de 1982 à 1998 en deux nouvelles sous-périodes, le point de rupture se situant en 1991. Le résultat est à nouveau l'instabilité du même paramètre, allant cette fois-ci en sens opposé. La section 4 est consacrée à la conclusion.

## 1 Spécification de la courbe de Phillips néo-keynésienne hybride

L'hypothèse principale de la littérature néo-keynésienne suppose que les firmes font face à des contraintes sur la fréquence de leurs ajustements de prix. Les firmes évoluant dans un cadre de concurrence imparfaite, lorsqu'elles font face à des coûts d'ajustements, peuvent choisir de garder un prix fixe pour plusieurs périodes. La structure de rigidité des prix la plus utilisée est celle de Calvo (1983). Chaque firme fait face à une distribution géométrique des délais imposés pour modifier son prix. On note  $\alpha$  la probabilité pour chaque firme de garder son prix fixe à chaque période et  $(1 - \alpha)$  la probabilité de modifier son prix. Ces probabilités sont dépendantes du temps et donc indépendantes de l'histoire de chaque firme. Le délai moyen d'ajustement des prix est de  $1/(1 - \alpha)$  périodes et la probabilité pour une firme d'une modification de son prix après  $(i - 1)$  périodes est égale à  $(1 - \alpha) \alpha^{i-1}$ .

Cette spécification permet d'engendrer une inertie du niveau des prix, mais pas du taux d'inflation. Galí et Gertler (1999) l'ont donc complétée en introduisant



une dépendance explicite par rapport à l'inflation passée. Ils supposent que parmi les firmes pouvant modifier leur prix, une partie  $(1 - \omega)$  utilise des anticipations rationnelles et emploie une règle de fixation des prix tournée vers le futur. Une fraction  $\omega$  utilise elle une règle de fixation des prix tournée vers le passé.

Le niveau général des prix est une moyenne des prix en vigueur dans l'économie, ceci représentant une approximation linéaire d'un indice de prix CES :

$$\begin{aligned} p_t &= (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j x_{t-j} \\ &= \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha) x_t \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $p_t$  est le niveau général des prix et  $x_t$  est un index des prix modifiés en  $t$ . Les firmes ne modifient pas leurs prix de manière identique et cet indice s'écrit de la manière suivante :

$$x_t = (1 - \omega) p_t^f + \omega p_t^b \quad (5.2)$$

où  $p_t^f$  le prix fixé en  $t$  par les firmes tournées vers le futur et  $p_t^b$  le prix fixé par celles tournées vers le passé. Chaque firme prospective cherche à minimiser la fonction de perte qui mesure la somme des écarts entre le prix fixé et les prix optimaux, au cours de la durée de vie anticipée du contrat :

$$L_t = \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j E_t \left( p_t^f - p_{t+j}^* \right)^2 \right] \quad (5.3)$$

où  $\beta$  est le taux d'actualisation et  $p_{t+j}^*$  est le prix optimal qu'une firme tournée vers le futur souhaiterait fixer pour la période  $(t + j)$ . Ce prix optimal représente le prix maximisant le profit à une date donnée en l'absence de rigidité de prix. Dans un cadre de concurrence imparfaite, il est égal au coût marginal nominal (noté  $mcn$ ) auquel s'ajoute un taux de marge que nous normalisons à 0. Étant donné les

probabilités d'ajustement des prix à chaque période, on peut réécrire la fonction de perte (5.3) des firmes opérant dans un environnement à la Calvo comme :

$$\begin{aligned} L_t &= \left(p_t^f - p_t^*\right)^2 + \alpha\beta \left(p_t^f - p_{t+1}^*\right)^2 + \alpha^2\beta^2 \left(p_t^f - p_{t+2}^*\right)^2 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j E_t \left(p_t^f - p_{t+j}^*\right)^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Le prix fixé est alors le suivant :

$$\begin{aligned} p_t^f &= [1 - \alpha\beta] \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j E_t p_{t+j}^* \\ &= (1 - \alpha\beta) p_t^* + \alpha\beta E_t p_{t+1}^f \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les firmes tournées vers le passé utilisent la règle de fixation des prix suivante :

$$p_t^b = x_{t-1} + \pi_{t-1} \quad (5.6)$$

En utilisant cette règle de fixation des prix, Gali et Gertler supposent qu'il n'existe aucun écart persistant entre cette règle et un comportement optimal, que le prix à la date  $t$  ne dépend que de l'information disponible antérieurement et que les firmes ne sont pas capables de discerner si les autres firmes sont tournées vers le passé "*backward-looking*" ou vers l'avenir "*forward-looking*".

La réécriture des équations (5.5) et (5.6) permet d'obtenir la courbe de Phillips suivante :

$$\pi_t = \gamma^f E_t \pi_{t+1} + \gamma^b \pi_{t-1} + \lambda (mcn_t - p_t) \quad (5.7)$$

où  $\gamma^f = \beta\alpha/\varphi$ ,  $\gamma^b = \omega/\varphi$ ,  $\lambda = (1 - \alpha)(1 - \beta\alpha)(1 - \omega)/\varphi$ ,  $\varphi = \alpha + \omega[1 - \alpha(1 - \beta)]$ .

L'inflation courante est fonction de l'inflation future anticipée, de l'inflation passée et de l'évolution du coût marginal réel supporté par les firmes. Le poids accordé à chacun de ces paramètres est fonction de trois variables : le taux d'actualisation, la probabilité de changement des prix et la proportion d'agents "*backward*" dans

la population. Le premier de ces trois paramètres est un relatif aux préférences des agents et donc invariant aux évolutions de l'environnement macroéconomique. En revanche, les deux autres paramètres dépendent à priori du régime monétaire en place. La persistance de l'inflation n'est donc pas un phénomène structurel dans cette modélisation. Dans les autres modèles hybrides populaires, proposés notamment par Fuhrer & Moore (1995) ou par Christiano, Evans & Eichenbaum (2001), les coefficients sur l'inflation future et passée sont constants et indépendants de toute considération sur le régime monétaire représentant une économie où la persistance de l'inflation est un phénomène stable à travers le temps. Si, comme nous l'avons indiqué en introduction, le degré de persistance est très variable, ce type de spécification peut donner de bons résultats empiriques à un moment donné mais peut conduire à d'importantes erreurs d'analyse quant à l'impact de régimes monétaires alternatifs.

## **2 Une analyse empirique de la stabilité des paramètres**

L'objectif de cette section est de voir si la mise en place par la Réserve Fédérale d'un nouveau régime monétaire au début des années 80, ciblant de manière explicite la stabilité des prix mais sans référence quantitative précise, a effectivement eu un impact important sur les paramètres du modèle hybride néo-keynésien testé sur les données américaines. La plupart des travaux existant considère l'ensemble de la période d'après guerre aux États-Unis comme une période homogène. Dans un premier temps, nous prenons en considération deux sous-périodes autour du point de rupture se situant au début des années 80, peu de temps après l'arrivée de Paul Volcker à la tête de la Réserve Fédérale. Nous pensons que la période post-Volcker peut être elle-même divisée en deux sous-périodes : Une première phase représentant la recherche par la banque centrale de la stabilité des prix et de gains en crédibilité

et une seconde phase consistant en un régime crédible d'une faible inflation lié à un ciblage implicite de l'inflation [voir Goodfriend (2003)], sans objectif numérique explicite. La recherche porte sur la stabilité à travers différents régimes monétaires des trois paramètres de la courbe de Phillips hybride. Nous analysons la stabilité globale puis la stabilité partielle des coefficients.

Le premier paramètre étudié est  $\beta$ , le taux d'actualisation. Ce paramètre de préférence est normalement indépendant du régime monétaire et doit être stable à travers le temps. Le second paramètre est  $\alpha$ , la probabilité de garder son prix fixe. Ball, Mankiw & Romer (1988) montrent que la fréquence d'ajustement des prix est dépendante du niveau moyen de l'inflation. Plus ce paramètre  $\alpha$  est bas, plus les firmes ont un coût faible à garder des prix fixes et choisissent en conséquence d'ajuster leurs prix moins souvent, conduisant à une valeur plus forte de  $\alpha$ . Willis (2003) note également que le développement des nouvelles technologies de l'information doit modifier la durée moyenne des prix. En effet, l'introduction des nouvelles technologies permet à la fois de diminuer le coût "*physique*" de changement des prix [voir Willis (2003)] et permet également de diminuer les coûts informels liés aux problèmes managériaux et informationnels. L'introduction de ces technologies a eu lieu au début des années 80 et s'est accélérée durant les années 90, favorisant une baisse de  $\alpha$  sur cette période. Dans le découpage considérant la période 1981-1998 comme une période homogène, cet effet doit jouer de manière inverse à l'effet précédent, produisant un impact indéterminé sur  $\alpha$ . Si l'on découpe cette même période en deux sous-périodes avec un point de rupture fin 1990, l'accélération du progrès technique survenue lors des années 90, conjointe à une plus faible inflation moyenne, doit au contraire favoriser une diminution de  $\alpha$ . Au final, plusieurs éléments ont pu influencer sur le comportement individuel de fixation des prix, leur impact agrégé

sur la dynamique de l'inflation n'étant pas déterminé a priori.

Finale­ment, le dernier paramètre d'intérêt du modèle est  $\omega$ . Dans le modèle de Galí et Gertler, la répartition des agents quant à leur mode de fixation des prix est une sorte de boîte noire. Elle est considérée comme un paramètre structurel dont la détermination est exogène. La décision d'une firme d'utiliser une règle simple tournée vers le passé ou une règle prospective plus complexe doit toutefois logiquement résulter d'un calcul. Ce dernier calcul compare les gains à obtenir une prévision plus précise de l'inflation future aux coûts relevant de l'utilisation de techniques de prévision sophistiquées. La lisibilité de la politique menée par la banque centrale est donc cruciale dans la détermination de ce choix. Ball (2000) montre ainsi que l'écart de l'erreur moyenne d'anticipation entre les agents utilisant des anticipations adaptatives et ceux utilisant des techniques de prévisions plus sophistiquées est significativement différent lorsque l'on considère différentes périodes historiques, suggérant que cet écart dépend du régime monétaire en vigueur. Par exemple, si la banque centrale cible le niveau des prix, les corrélations temporelles de l'inflation peuvent être systématiquement négatives, induisant une erreur de prévision des agents "*backward*" largement plus grande que celle des agents "*forward*". Si la banque centrale choisit au contraire de systématiquement accommoder les chocs d'inflation, de manière à ce que ceux-ci soient pleinement persistants, alors il peut être rationnel d'utiliser une règle "*backward-looking*" d'ajustement des prix. De manière générale, moins l'évolution de l'inflation à la période suivante est prévisible plus le recours à une règle "*backward-looking*" est justifié.

## 2.1 Spécification de la méthode d'estimation

Dans cette section, nous présentons la procédure basée sur les variables instrumentales utilisée par Galí & Gertler (1999) pour estimer les paramètres d'intérêt  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\omega$ . Nous notons  $\Omega_{t-1}$  la matrice des variables observées à la date  $(t - 1)$ . Nous considérons les données trimestrielles de l'économie américaine<sup>1</sup> utilisées par Galí & Gertler (1999), couvrant la période allant du premier trimestre 1961 jusqu'au premier trimestre 1998. Pour constituer l'ensemble des variables instrumentales, une constante ainsi que les variables suivantes retardées d'une période sont considérées : la part du travail<sup>2</sup>, l'inflation mesurée par le déflateur du P.I.B, l'écart de la production<sup>3</sup>, l'augmentation des salaires, l'augmentation des prix des matières premières, et l'écart entre le taux d'intérêt de court et de long terme.

Sous l'hypothèse des anticipations rationnelles, l'équation (5.7) peut être utilisée pour écrire l'ensemble des conditions d'orthogonalité comme suit :

$$E \left\{ \left( \hat{\pi}_t - c - \tilde{\lambda} \hat{s}_t - \gamma_f E_t \hat{\pi}_{t+1} - \gamma_b \hat{\pi}_{t-1} \right) \Omega_{t-1} \right\} = 0 \quad (5.8)$$

où  $\tilde{\lambda}$ ,  $\gamma_f$ , et  $\gamma_b$  sont définis selon (5.7),  $\hat{s}_t$  représente le coût unitaire du travail réel (l'approximation du coût marginal réel) et  $c$  est une constante. L'équation (5.8) peut être estimée en utilisant l'ensemble de variables instrumentales que nous avons prédéfini [i.e., en utilisant une version de la méthode des moments généralisés (GMM)]. Cette spécification a été utilisée par Galí & Gertler (1999), et par Jondeau & Le Bihan (2001) pour l'étude du cas restrictif où  $\gamma_b + \gamma_f = 1$ . Nous pouvons

<sup>1</sup>La source des données est d'une part la Réserve Fédérale de St. Louis et d'autre part, le département américain de travail.

<sup>2</sup>Dans un modèle où la production est représentée par une fonction de production Cobb-Douglas, le coût marginal de la production est approximé par part des revenus du travail dans l'économie [voir Galí & Gertler (1999)].

<sup>3</sup>L'output gap est obtenu par le résidu du filtrage de la composante tendancielle de la production potentielle (nous utilisons le filtre d'Hodrick-Prescott avec  $\lambda = 1600$ ).

ré-écrire l'équation (5.8) alternativement comme suit :

$$E \left\{ \left( \frac{1}{\gamma_f} \left[ \hat{\pi}_t - c - \tilde{\lambda} \hat{s}_t - \gamma_f E_t \hat{\pi}_{t+1} - \gamma_b \hat{\pi}_{t-1} \right] \right) \Omega_{t-1} \right\} = 0 \quad (5.9)$$

En substituant les expressions de  $\tilde{\lambda}$ ,  $\gamma_b$  et  $\gamma_f$  dans l'équation (5.9), il est clair qu'il y a plusieurs manières de normaliser les courbes hybrides de Phillips. Galí & Gertler (1999) présentent deux propositions différentes. La première normalisation minimise les non-linéarités en multipliant par le coefficient  $\phi$  pour obtenir :

$$E \{ (\phi \hat{\pi}_t - c - (1 - \omega)(1 - \alpha)(1 - \alpha\beta) \hat{s}_t - \alpha\beta E_t \hat{\pi}_{t+1} - \omega \hat{\pi}_{t-1}) \Omega_{t-1} \} = 0 \quad (5.10)$$

Tandis que nous pouvons ré-écrire cette dernière équation de telle manière à ce que le poids de l'inflation courante soit égal à l'unité :

$$E \left\{ \left( \hat{\pi}_t - c - \frac{(1 - \omega)(1 - \alpha)(1 - \alpha\beta)}{\phi} \hat{s}_t - \frac{\alpha\beta}{\phi} E_t \hat{\pi}_{t+1} - \frac{\omega}{\phi} \hat{\pi}_{t-1} \right) \Omega_{t-1} \right\} = 0 \quad (5.11)$$

où  $\phi \equiv \alpha + \omega [1 - \alpha(1 - \beta)]$ .

## 2.2 Les résultats des estimations avec un point de rupture en 1981

Nous présentons dans les tableaux (5.1) et (5.2), selon les deux types de normalisations considérées, les résultats de l'estimation en prenant comme point de rupture la fin de l'année 1981. De part et d'autre de cette date, les périodes sont caractérisées par des natures différentes de dynamique de l'inflation (haute et faible variabilité de l'inflation).

Type I	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\tilde{\lambda}$	$\gamma_b$	$\gamma_f$	J-stat
1961 :1 à 1998 :1 (149 observations)	0.803 (0.024)	0.911 (0.043)	0.28 (0.05)	0.035 (0.011)	0.258 (0.027)	0.674 (0.052)	9.78 (0.979)
1961 :1 à 1981 :4 (84 observations)	0.724 (0.026)	0.894 (0.039)	0.316 (0.071)	0.065 (0.008)	0.307 (0.031)	0.628 (0.050)	9.87 (0.982)
1982 :1 à 1998 :1 (65 observations)	0.849 (0.032)	0.973 (0.07)	0.223 (0.046)	0.006 (0.04)	0.192 (0.02)	0.711 (0.063)	9.85 (0.983)

Tableau (5.1) : Résultats de l'estimation GMM du type I

Type II	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\tilde{\lambda}$	$\gamma_b$	$\gamma_f$	J-stat
1961 :1 à 1998 :1 (149 observations)	0.835 (0.028)	0.927 (0.034)	0.463 (0.053)	0.015 (0.005)	0.368 (0.029)	0.615 (0.029)	9.72 (0.985)
1961 :1 à 1981 :4 (84 observations)	0.798 (0.021)	0.902 (0.044)	0.481 (0.101)	0.025 (0.009)	0.396 (0.042)	0.594 (0.048)	9.86 (0.983)
1982 :1 à 1998 :1 (65 observations)	0.847 (0.031)	0.976 (0.11)	0.254 (0.048)	0.033 (0.025)	0.242 (0.019)	0.739 (0.065)	9.82 (0.979)

Tableau (5.2) : Résultats de l'estimation GMM du type II

La première ligne des deux tableaux représente l'estimation sur l'ensemble de l'échantillon utilisé par Galí & Gertler (1999). Les fonctions de réponse sont données dans l'annexe I. Comme le notent Galí et Gertler, l'aspect "*forward*" de cette équation est dominant et la courbe de Phillips néo-keynésienne sans retard d'inflation peut représenter une bonne approximation de la réalité. Néanmoins, en divisant l'échantillon en deux régimes monétaires différents (pré-Volcker et post-Volcker), on observe que les coefficients se modifient, notamment en ce qui concerne la fraction d'agents utilisant une règle tournée vers le passé. Dans le tableau (5.2),  $\omega$  est deux fois plus important avant 1981 qu'après. Par conséquent, le poids accordé à l'inflation retardée diminue. Comme nous l'avons indiqué précédemment, une explication de ce phénomène peut résider dans la mise en place de règles monétaires crédibles reposant sur un critère de stabilité des prix. Après 1981, la banque centrale s'engageant de manière crédible à maintenir la stabilité des prix, les agents savent qu'à



court et moyen terme, l'inflation va rejoindre un niveau faible. Il est alors plus facile pour les firmes de prévoir le comportement futur de la banque centrale et il est logique que le paramètre  $\gamma_f$  augmente au cours de la seconde période. Ceci contraste avec la période pré-1981 où la banque centrale avait tendance à accommoder les chocs d'inflation, justifiant l'utilisation plus importante de règles "backward".

Cette explication est également compatible avec l'évolution du paramètre  $\alpha$ . Lors de la période post-Volcker, l'engagement de la banque centrale à maintenir la stabilité des prix étant jugé de plus en plus crédible [voir Goodfriend (2003)], il est rationnel pour les agents, en présence de coûts de changement des prix, de changer moins souvent leurs prix. Cet effet joue en faveur d'une augmentation de la valeur de  $\alpha$ . Si l'estimation de type I montre une stabilité de ce coefficient, l'estimation de type 2 montre au contraire une augmentation (0.849 après 1982 contre 0.724 avant), en accord avec l'effet attendu. La variation est toutefois faible, l'effet technologique présenté par Willis (2003) pouvant influencer de façon opposée.

Nous appliquons une série de tests de stabilité (test de Chow) afin de savoir si on peut considérer les paramètres estimés comme étant stables (globalement et partiellement) sur les deux sous périodes distinctes. La spécification du modèle est la même, mais les valeurs estimées des coefficients pour les deux échantillons sont différentes.

Nous testons dans un premier temps la stabilité des paramètres dans leur globalité. Nous testons en hypothèse nulle :

$$H_0 : \begin{pmatrix} \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 \\ \hat{\omega} = \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 \end{pmatrix}$$

Les paramètres sans indice sont issus de l'estimation du modèle durant la période entière allant de 1961 à 1998 et les paramètres avec indice sont issus de l'estimation du modèle, soit durant la période (1) allant de 1961 à 1981, soit durant la période (2) allant de 1982 à 1998. Les statistiques empiriques de Fisher<sup>4</sup> sont égales à :

Type I	$F_1^* = 0,24 < F_{4;140}^{0,05} = 2,4$
Type II	$F_2^* = 0,76 < F_{4;140}^{0,05} = 2,4$

Le fractile d'ordre 5% pour la loi de Fisher avec les degrés de liberté 4 et 140 est égal à 2,4. On accepte donc l'hypothèse de stabilité des coefficients.

Nous testons à présent la stabilité partielle des paramètres intérêt  $\alpha, \beta$  et  $\omega$ . Les statistiques empiriques de Fisher sont égales à :

$H0$	$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$	$\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2$
$F_1^*$ (TypeI)	$0,56 < F_{83;64}^{0,05} = 1,37$	$0,23 < F_{83;64}^{0,05}$	$1,83 > F_{83;64}^{0,05}$
$F_2^*$ (TypeII)	$0,78 < F_{83;64}^{0,05} = 1,37$	$0,12 < F_{83;64}^{0,05}$	$3,29 > F_{83;64}^{0,05}$

Nous observons donc que le test rejette l'hypothèse de stabilité du paramètre  $\omega$  au cours des deux sous-périodes. En revanche, la stabilité du paramètre  $\alpha$  mesurant la fréquence des ajustements de prix ne peut être rejetée. La théorie néo-keynésienne fait souvent l'hypothèse de sa stabilité. Ceci était démontré par nos résultats. L'absence de rupture apparente dans la valeur de  $\alpha$ , contrairement à ce qu'implique la théorie sous-jacente, peut s'expliquer par le phénomène de technologie jouant en sens contraire, les deux effets s'estompant.

<sup>4</sup>Le Fisher empirique est égal à :

$$F^* = \frac{[SCR - (SCR^1 + SCR^2)] / ddl_n}{(SCR^1 + SCR^2) / ddl_d}$$

avec  $SCR, SCR^1$  et  $SCR^2$  sont respectivement les sommes de carrés des résidus de la période globale, de la première et de la deuxième période.  $ddl_n$  et  $ddl_d$  désignent respectivement les degrés de liberté.

### 2.3 Etude de la stabilité avec découpage de deux périodes dans l'intervalle 1981-1998

Ahamada & Ben Aïssa (2004), Ben Aïssa & Jouini (2003) et Ben Aïssa, Boutahar & Jouini (2004) détectent, en testant respectivement la stabilité de la variance, la stabilité de la densité spectrale évolutive et la stabilité de la moyenne, la fin de l'année 1990 comme étant une date de changement de régime de la dynamique de l'inflation américaine. Le fait que cette date soit identifiée par le biais de trois tests différents, qui renseignent sur des instabilités de nature différente nous incite à la prendre en considération et à vouloir entreprendre un autre test de stabilité pour voir s'il est possible de déceler une véritable modification de la dynamique de l'inflation. On peut supposer qu'elle correspond à la période où la Réserve Fédérale a commencé à bénéficier d'un très fort degré de crédibilité auprès des agents privés, peu de temps après l'arrivée d'Alan Greenspan à sa tête. La coïncidence avec l'année de rupture dans la moyenne de l'inflation trouvée par Levin & Piger (2004) ou Pivetta & Reis (2004) renforce le choix de cette date.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons constaté que les agents économiques se comportaient d'une manière plus orientée vers le passé "*backward-looking*" pendant les années soixante et soixante-dix que durant les années quatre-vingts. Ils semblaient avoir pris en compte le changement de la politique monétaire après la désinflation Volcker. Par conséquent, ils intégraient dans leur manière de fixer les prix, les objectifs futurs de la Réserve Fédérale illisibles auparavant. Lors de l'arrivée d'Alan Greenspan aux commandes de la Fed, son objectif premier continuait d'être la stabilité des prix. Les taux d'inflation américains semblent converger à ce niveau au début l'année 1990. Par la suite, le taux d'inflation est resté compris dans une fourchette allant de 1 à 3%, correspondant à différentes mesures de la stabilité

des prix, compte tenu des biais de mesure existant. Notre intuition est que les agents économiques continuent à se comporter d'une manière très prospective jusqu'à ce que le changement de la politique monétaire atteigne complètement ses objectifs. Ensuite, en présence de taux d'inflation faibles et en l'absence de la fixation d'une cible explicite par la banque centrale, le comportement des agents redevient un peu moins prospectif. D'autre part, l'objectif de stabilité des prix a lieu à moyen terme, or comme le note Siklos (2002), l'horizon retenu par la Réserve Fédérale pour atteindre sa cible n'est pas clair non plus.

Afin de vérifier cette intuition, nous nous proposons de refaire le même exercice empirique mais cette fois-ci en considérant un découpage de la période 1982-1998 avec pour point de rupture la fin de l'année 1990.

Type I	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\tilde{\lambda}$	$\gamma_b$	$\gamma_f$	J-stat
1982 :1 à 1998 :1 (65 observations)	0.849 (0.032)	0.973 (0.07)	0.223 (0.046)	0.006 (0.04)	0.192 (0.02)	0.711 (0.063)	9.85 (0.983)
1982 :1 à 1990 :4 (36 observations)	0.863 (0.034)	0.969 (0.081)	0.155 (0.068)	0.019 (0.053)	0.151 (0.033)	0.819 (0.089)	9.73 (0.979)
1991 :1 à 1998 :1 (29 observations)	0.835 (0.03)	0.984 (0.068)	0.273 (0.035)	0.016 (0.038)	0.243 (0.017)	0.686 (0.058)	9.88 (0.98)

Tableau (5.1) : Résultats de l'estimation GMM du type I

Type II	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\tilde{\lambda}$	$\gamma_b$	$\gamma_f$	J-stat
1982 :1 à 1998 :1 (65 observations)	0.795 (0.026)	0.976 (0.11)	0.254 (0.048)	0.033 (0.025)	0.242 (0.019)	0.739 (0.065)	9.82 (0.988)
1982 :1 à 1990 :4 (36 observations)	0.811 (0.031)	0.975 (0.091)	0.202 (0.065)	0.031 (0.021)	0.2 (0.014)	0.783 (0.059)	9.79 (0.985)
1991 :1 à 1998 :1 (29 observations)	0.779 (0.029)	0.983 (0.084)	0.287 (0.033)	0.035 (0.028)	0.271 (0.023)	0.718 (0.077)	9.85 (0.981)

Tableau (5.2) : Résultats de l'estimation GMM du type II

Les fonctions de réponse sont données en annexe. Nous testons à nouveau la

stabilité des paramètres, dans leur globalité, avec en hypothèse nulle :

$$H_0 : \begin{pmatrix} \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 \\ \hat{\omega} = \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Les statistiques empiriques de Fisher sont égales à :

Type I	$F_1^* = 0,49 < F_{4;57}^{0,05} = 2,54$
Type II	$F_2^* = 0,94 < F_{4;57}^{0,05} = 2,54$

Tableau (5.3) : Résultats du Test de stabilité globale des paramètres

Le fractile d'ordre 5% pour la loi de Fisher avec les degrés de liberté 4 et 57 est égal à 2,54. On accepte donc l'hypothèse de stabilité des coefficients.

Nous testons la stabilité partielle des paramètres d'intérêt  $\alpha, \beta$  et  $\omega$ . Les statistiques empiriques de Fisher sont égales à :

$H_0$	$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$	$\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2$
$F_1^*$ (Type I)	$1,02 < F_{35;28}^{0,05} = 1,65$	$1,13 < F_{35;28}^{0,05}$	$3,02 > F_{35;28}^{0,05}$
$F_2^*$ (Type II)	$0,91 < F_{35;28}^{0,05} = 1,65$	$0,94 < F_{35;28}^{0,05}$	$3,10 > F_{35;28}^{0,05}$

Tableau (5.4) : Résultats du Test de stabilité partielle des paramètres

L'analyse des tests de stabilité nous conduit à accepter, à nouveau, la stabilité des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et à rejeter celle de  $\omega$ . Ce dernier paramètre augmente à partir de 1980 et l'inflation redevient un peu "backward". Ceci est cohérent avec notre explication relative au coût de viser une cible non explicite. Nous remarquons également que l'argument de Willis sur l'impact des nouvelles technologies semble correct, mais son impact est mineur. Dans les deux estimations, le paramètre  $\alpha$  diminue légèrement après 1990, mais les tests ne permettent pas de conclure à son instabilité. Là encore, l'hypothèse néo-keynésienne standard d'un  $\alpha$  stable semble correcte.

### 3 Conclusion

Selon nos résultats, le seul paramètre instable de la courbe de Phillips est celui représentant la règle de fixation des prix, alors que la recherche récente sur l'endogénéisation des paramètres du modèle néo-keynésien s'est focalisée exclusivement sur la durée de la fixité des prix  $\alpha$ . Cette durée, supposée dépendante du comportement de l'inflation, ne semble pas jouer un rôle important dans les variations de la persistance. Ceci conforte l'utilisation d'hypothèses de rigidité nominale dépendante du temps ("*time-dependent*") plutôt que dépendante de l'état de l'économie ("*state-dependent*"). La raison est sans doute liée au fait que plusieurs effets viennent jouer en sens inverse, certains de ces effets n'étant pas pris en compte dans les modèles dépendant de l'état de l'économie.

La représentation de Galí et Gertler n'est pas structurelle au sens de Lucas dans la mesure où la proportion d'agents "*backward*" varie avec le régime monétaire. Ceci est un point intéressant car si la persistance de l'inflation n'est pas un phénomène structurel, c'est à dire indépendant du régime monétaire, alors un modèle comme celui de Galí et Gertler est préférable aux autres car il permet de reproduire des degrés de persistance différents, ce que ne permettent pas par exemple les modèles de Fuhrer & Moore (1995) ou de Christiano, Eichenbaum & Evans (2001)<sup>5</sup>. En revanche, son utilisation courante dans les exercices traitant de la politique monétaire qui considèrent constants les paramètres pondérant l'inflation passée et future, est erronée. Dans ce cas, il est nécessaire de développer d'avantage les fondements microéconomiques en déterminant la règle de choix des agents quant à l'utilisation

---

<sup>5</sup>La modification de ce modèle proposée par Woodford (2003), introduisant un degré d'indexation inférieur à 1, peut néanmoins engendrer une variation de la persistance lorsque le degré d'indexation des prix varie.

d'une règle de fixation des prix "*backward*" ou "*forward*".

Nos résultats ont également des implications intéressantes concernant la modélisation des processus d'apprentissage de la part des agents. La littérature récente introduisant ce genre de mécanismes suppose un comportement adaptatif de la part des agents lorsque l'environnement économique change, puis un comportement rationnel lorsque le régime est stable. Nos estimations semblent favoriser un comportement inverse. En effet, il semble plus logique d'utiliser le maximum d'informations disponibles et d'adopter un comportement très prospectif lorsque l'environnement économique se modifie, car tout comportement adaptatif se traduit par d'importantes erreurs. En revanche, lorsque l'environnement macroéconomique est assez stable, les coûts à ne pas traiter optimalement l'information sont moindres, favorisant le recours à des règles de comportement simples.

## 4 Annexes

### 4.1 Annexe I : Les fonctions de réponse de l'inflation (1961-1998, 1961-1981, 1982-1998)

Pour les périodes 1961-1998, 1961-1981 et 1982-1998, les fonctions de réponse de l'inflation à un choc sont données par les graphiques (5.1) et (5.2) :

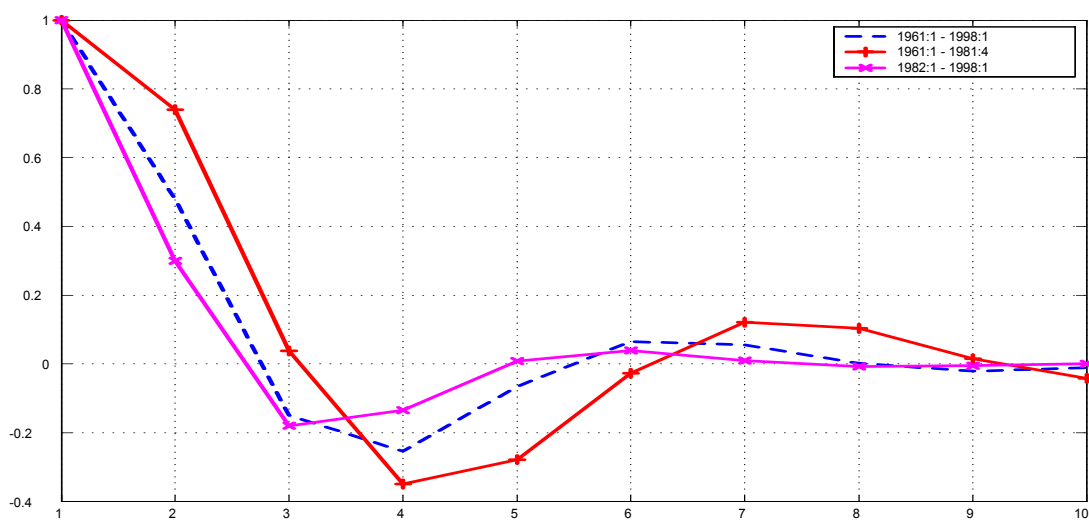


Figure (5.1) : La réponse de l'inflation - Type I

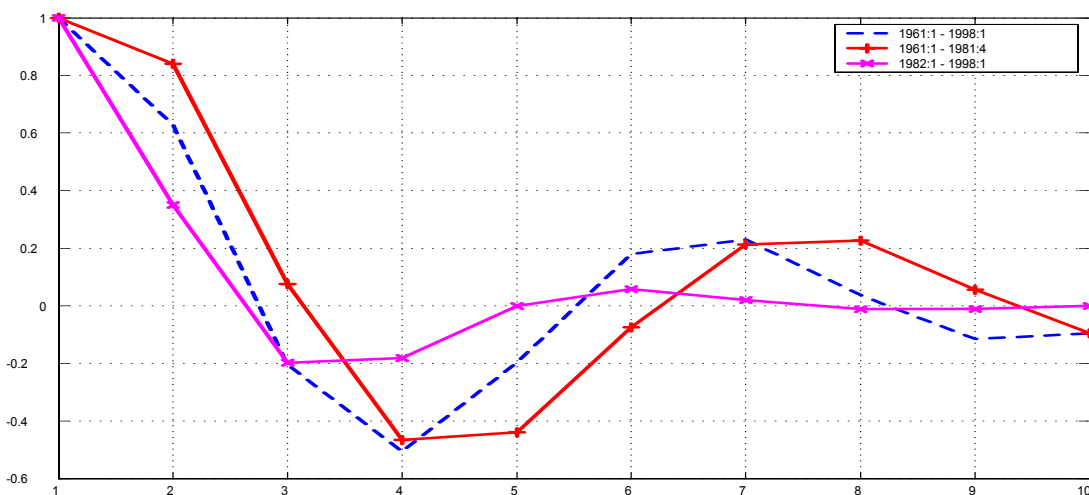


Figure (5.2) : La réponse de l'inflation - Type II



Pour le calcul des valeurs propres, il est possible de réécrire (5.7) en termes de niveau des prix :

$$E_t p_{t+1} - \left( \frac{1 + \gamma^f + \lambda}{\gamma^f} \right) p_t + \left( \frac{1 + \gamma^b}{\gamma^f} \right) p_{t-1} - \frac{\gamma^b}{\gamma^f} p_{t-2} = -\frac{\lambda}{\gamma^f} mcn_t \quad (5.13)$$

L'équation caractéristique possède les trois racines suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_1, \theta_2 &= (1/2) \left[ \alpha(1 - \omega) + 2\omega \pm ((\alpha(1 - \omega) + 2\omega)^2 - 4\omega)^{1/2} \right] \\ \theta_3 &= 1/(\alpha\beta) \end{aligned} \quad (5.14)$$

L'utilisation de la méthode de factorisation permet d'obtenir la dynamique des prix suivante :

$$\begin{aligned} p_t &= (\theta_1 + \theta_2) p_{t-1} - \theta_1 \theta_2 p_{t-2} + \frac{\lambda}{\gamma^f} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\theta_3} \right)^i E_t mcn_{t+i} \\ &= [\omega(2 - \alpha) + \alpha] p_{t-1} - \omega p_{t-2} + \frac{(1 - \alpha)(1 - \omega)(1 - \alpha\omega)}{\alpha\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha\beta} \right)^i E_t mcn_{t+i} \end{aligned} \quad (5.15)$$

La dynamique des prix est exprimée en fonction des valeurs passées des prix et des anticipations faites sur l'évolution du processus concernant l'évolution du coût marginal. Le degré de persistance augmente avec  $\omega$ .

## 4.2 Annexe II : Les fonctions de réponse de l'inflation (1982-1998, 1982-1990, 1991-1998)

Pour les périodes 1982-1998, 1982-1990 et 1991-1998, les fonctions de réponse de l'inflation à un choc sont données par les graphiques (5.3) et (5.4) :

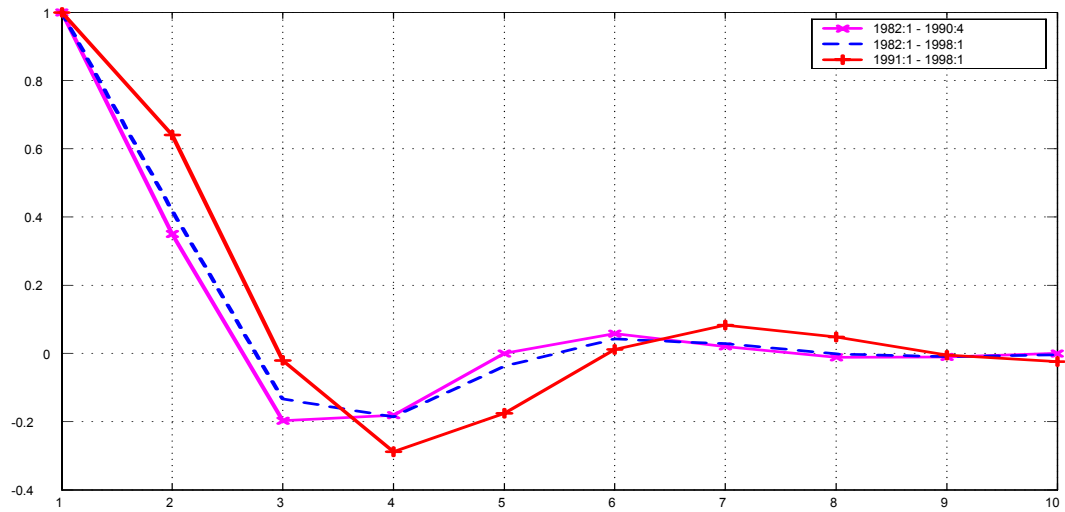


Figure (5.3) : La réponse de l'inflation - Type I

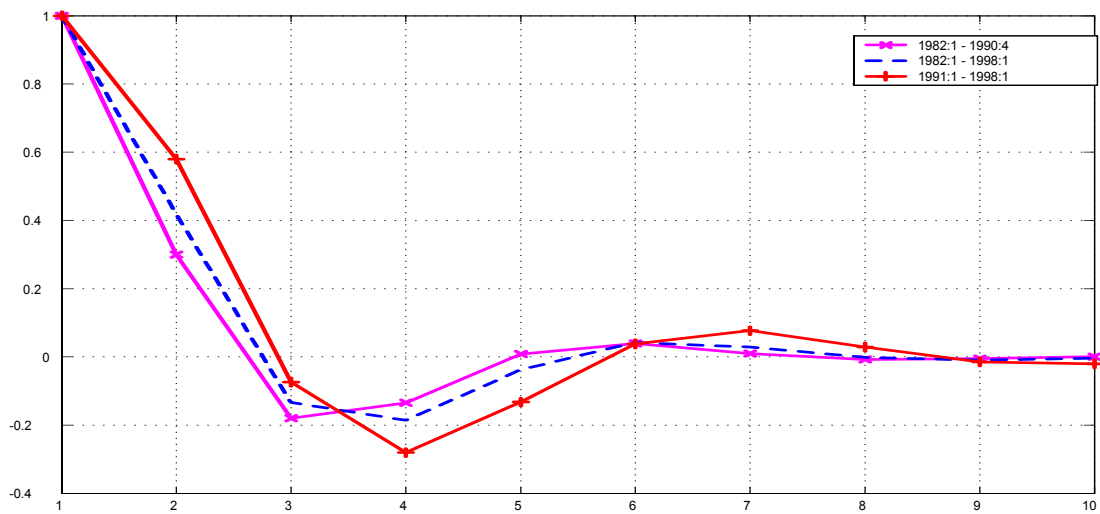


Figure (5.4) : La réponse de l'inflation - Type II

# Chapitre 6

## Résolution des Modèles Multivariés à Anticipations Rationnelles & Estimation Structurelle d'un Modèle Néo-Keynésien Général

### Introduction

Si les modèles auto-régressifs sont certainement plus faciles à mettre en pratique puisque les méthodes d'estimation économétrique nécessaires sont moins complexes, elles souffrent d'un défaut important comme l'a bien mis en évidence la célèbre critique de Lucas (1976). La seule réponse envisageable à la critique de Lucas consiste à avoir recours à un modèle structurel qui puisse décrire un changement de comportement des agents économiques face à une modification du fonctionnement de la politique monétaire. Les équations des modèles doivent donc posséder des fondements microéconomiques et dans la mesure où on va placer les agents économiques dans un cadre intertemporel, les anticipations rationnelles vont tout naturellement figurer dans les différentes équations de comportement. Si McCallum (1999) insistait avant tout sur la présence des anticipations rationnelles pour remédier à la critique

de Lucas, Rotemberg & Woodford (1998) mettent en avant au contraire la nécessité des fondements microéconomiques puisque, selon eux, rien ne garantit que les anticipations, aussi rationnelles qu'elles puissent être, sont invariantes aux décisions de politique monétaire.

Le fondement de la courbe néokeynésienne de Phillips est dérivé d'une base micro-économique dans un modèle avec optimisation des coûts et des comportements des agents reliant l'inflation à l'écart de production. Cette nouvelle version de la courbe de Phillips n'inclut aucune variable retardée ou '*backward-looking*', mais Fuhrer & Moore (1995) expliquent que la courbe s'adapte mieux aux données quand l'inflation retardée est introduite. Ils expliquent la nécessité d'inclure l'inflation retardée (une inertie) par le phénomène observé sur les données réelles qui résume la persistance de l'inflation. Galí & Gertler (1999) montrent que le coût marginal est le meilleur indicateur de la capacité d'utilisation que l'écart de production. Leurs travaux empiriques traduisent l'importance que la composante retardée peut avoir dans les modèles du type Fuhrer et Moore. Ils expliquent cette importance par le fait de considérer l'*output gap* comme variable forçante à la place du coût marginal. Cependant, même en considérant les coûts marginaux, la composante '*backward*' reste significative.

La présence des anticipations rationnelles dans le modèle hybride de la nouvelle courbe de Phillips peut donc se justifier par des considérations théoriques : ces fondements microéconomiques immuniseraient notre modèle contre la critique de Lucas. Cependant, leur incorporation dans l'estimation empirique n'est pas sans conséquences quant aux techniques économétriques utilisées dans la mesure où les méthodes d'estimation classiques ne représentent plus du tout un outil adapté. En outre, l'estimation empirique doit absolument tenir compte des contraintes imposées

sur les paramètres structurels. Le niveau de difficulté augmente considérablement quand il s'agit d'un système d'équations structurelles et simultanées avec l'incorporation des anticipations rationnelles.

Ce chapitre a pour objectif de comparer le comportement d'un modèle structurel pendant deux périodes caractérisées par un niveau opposé de volatilité de l'inflation d'une période à une autre. D'abord, nous considérons le modèle hybride de Galí & Gertler (1999) que nous estimons économétriquement par une méthode de variables instrumentales (une version des méthodes de moindres carrés) sur les données américaines pour les périodes d'avant et après Volcker<sup>1</sup> [année de référence : deuxième moitié de l'année 1981]. Le but de cette comparaison est de savoir si un tel modèle pourrait garder une certaine stabilité des paramètres structurels tout en capturant le comportement des dynamiques de l'inflation. Ensuite, nous élargissons le champ comparatif à un modèle plus complet qui incorpore des dynamiques plus exhaustives reflétant la structure de l'économie. Ce modèle est composé d'une courbe d'offre (AS) qui n'est autre que la courbe hybride de Phillips, une courbe de demande (IS) et une équation qui représente l'instrument de la politique monétaire (le taux d'intérêt de court terme). Ce modèle inclut dans chacune de ses équations deux composantes, l'une est retardée et l'autre est anticipée, que nous avons justifiées par leur fondement microéconomique. Cependant, la difficulté pour la mise en pratique de l'estimation empirique du modèle est double. La première difficulté est celle de la résolution du système de trois équations simultanées avec anticipations rationnelles. Nous consacrons une partie dans ce chapitre pour présenter les techniques les plus utilisées afin de convertir le système actuel en système d'équa-

---

<sup>1</sup>Il est à rappeler que la deuxième moitié de l'année 1981 a fait l'unanimité des tests de changements structurels développés au deuxième chapitre. Le test d'instabilité de la densité spectrale qualifie cette date de point de changement de régime de long terme.

tions implémentable économétriquement. Quant à la deuxième difficulté, c'est celle du nombre très important de paramètres structurels (7 paramètres) à estimer qui sont eux-mêmes sujet à des contraintes structurelles à considérer absolument lors de l'estimation. Le problème souvent rencontré est un problème de non-convergence de l'estimation qui traduit l'impuissance du critère d'optimisation utilisé par le logiciel en question (dans notre cas, nous utilisons un critère classique 'Minz' sur Matlab, la recherche des optima s'effectue dans  $\mathbb{R}^7$ ). Par ailleurs, nous utilisons la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance en information complète.

## 1 Méthodes de Résolution pour les Modèles Multivariés à Anticipations Rationnelles

Dans cette section, nous fournissons une revue des méthodes de résolution des modèles multivariés à anticipations rationnelles les plus utilisées dans la littérature. Nous présentons aussi les nouvelles techniques qui permettent de tenir compte de plusieurs formes de non-stationnarité et de non linéarité.

D'abord, nous considérons, un modèle commun pour toutes les méthodes de résolution que nous présenterons. Le modèle considéré est un modèle hybride général qui distingue deux composantes, celle des variables qui sont orientées vers le passé '*backward-looking*' et celle des variables qui sont projetées dans le futur '*forward-looking*'. Nous utilisons des techniques classiques de martingale ou de différence de martingale pour obtenir les solutions pour la composante '*forward*'. La méthode est relativement simple à appliquer et exige une solution sous forme d'une équation quadratique dont les racines fournissent une caractérisation complète de toutes les classes possibles de solution, à savoir la solution stable unique, les solutions stables multiples, et le cas où aucune solution stable n'existe. Puisque nous devons imposer

quelques hypothèses seulement très faibles aux variables forçantes du modèle, cette méthode de résolution est applicable aux cas où les variables forçantes sont intégrées de premier ordre. Elle sert aussi pour montrer les dynamiques de la variance conditionnelle, ou d'autres formes de non-stationnarité ou de non-linéarité dans les variables forçantes.

### 1.1 Forme générale

Nous considérons le modèle structurel multivarié à anticipations rationnelles suivant :

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \mathbf{M}_{ij} E(\mathbf{x}_{t+j-i} | \Omega_{t-i}) = \mathbf{u}_t, \tag{6.1}$$

où  $\mathbf{x}_t$  est un vecteur des variables d'intérêt de dimension  $p \times 1$ ,  $\mathbf{u}_t$  représente un vecteur des "variables forçantes" de même dimension,  $\mathbf{M}_{ij} (i = 0, 1, \dots, n_1; j = 0, 1, \dots, n_2)$  est une matrice des coefficients de dimension  $p \times p$ , et  $\Omega_t$  représente la matrice de l'ensemble d'information dont on dispose à la date  $t$ , constituée des valeurs courantes et retardées de  $\mathbf{x}_t$  et de  $\mathbf{u}_t : \Omega_t = \{\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots; \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-1}, \dots; \dots\}$ . Les variables forçantes  $\{\mathbf{u}_t\}$  sont supposées conformes à l'ensemble de l'informations  $\Omega_t$ . nous supposons également que les anticipations conditionnelles  $E(\mathbf{u}_{t+i} | \Omega_t)$  existent. Il s'agit d'hypothèses relativement faibles sans forcément exiger, par exemple, que le processus  $\{\mathbf{u}_t\}$  soit linéaire ou de covariance stationnaire. Le système d'équations décrit par (6.1) couvre une grande variété de modèles linéaires (homogénéité de l'information) basés sur les anticipations rationnelles utilisées dans la littérature micro et macro-économique. À titre illustratif, cette variété peut inclure les modèles intertemporels de comportement des firmes ou/et des ménages, les modèles de croissance néo-classique et des cycles d'affaires. Dans le cadre de notre recherche, ce sont les

modèles néo-keynésiens ainsi que les modèles structurels à équations simultanées qui nous intéressent. Il est à noter que les spécifications ci-dessus tiennent compte aisément de l'inclusion des variables dépendantes retardées ou orientées vers le passé ‘*backward-looking*’ et des anticipations futures ‘*forward-looking*’ de  $\mathbf{x}_{t-i}$  basées sur l'information à différents points du passé, comme, par exemple,  $E(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{\Omega}_{t-2})$  ou encore  $E(\mathbf{x}_{t-2}|\mathbf{\Omega}_{t-4})$ . Par conséquent, il est facile de prouver que n'importe lequel des exemples ci-dessus peut être présenté comme cas particulier du système d'équation (6.1).

Même si nous avons besoin uniquement d'écrire un système d'équations de premier ordre impliquant un bloc de variables dépendantes à une période retardée et un autre bloc de variables à une période anticipée, nous envisageons le cas le plus général avec notamment  $n_1$  périodes retardées pour un premier bloc de variables dépendantes et  $n_2$  périodes anticipées pour le deuxième bloc. Pour la clarté de la présentation, il est recommandé d'accomplir cette transformation en deux étapes<sup>2</sup>. Dans la première étape, (6.1) peut être réduit à un système d'équations comprenant les termes retardés pour les  $n_1$  périodes passées et uniquement les termes relatifs à une seule période anticipée. Pour aboutir à cette fin, nous avons besoin de définir les matrices et les vecteurs suivants :

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ E(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{\Omega}_t) \\ \vdots \\ E(\mathbf{x}_{t+n_2}|\mathbf{\Omega}_t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{01} & \cdots & \mathbf{M}_{0n_2} \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{I}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{I}_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{i0} & \mathbf{M}_{i1} & \cdots & \mathbf{M}_{in_2} \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p \\ -\mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & & \mathbf{0}_p \end{pmatrix},$$

<sup>2</sup>Voir par exemple Broze, Gouriéroux & Szafarz (1990).



$$\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{p \times 1} \end{pmatrix},$$

où  $\mathbf{0}_p$  et  $\mathbf{I}_p$  représentent respectivement une matrice nulle et une matrice d'identité d'ordre  $p$ ,  $\mathbf{\Gamma}_0$  est une matrice non singulière de dimension  $[(n_2 + 1)p \times (n_2 + 1)p]$ , et  $\mathbf{v}_t$  est un vecteur de dimension  $[(n_2 + 1)p \times 1]$ . Alors, (6.1) peut être ré-écrit sous forme plus compacte comme suit :

$$\sum_{i=0}^{n_1} \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{z}_{t-i} + \mathbf{\Gamma}_{-1} E(\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{\Omega}_t) = \mathbf{v}_t \quad (6.2)$$

En utilisant ce résultat, la réduction désirée à un système de premier ordre peut être réalisée en définissant :

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{z}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{t-n_1+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 & \mathbf{\Gamma}_1 & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{n_1-1} \\ \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{I}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{I}_{(n_2+1)p} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{\Gamma}_{n_1} \\ -\mathbf{I}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & -\mathbf{I}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}_{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{-1} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} \\ \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} & \cdots & \mathbf{0}_{(n_2+1)p} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

où  $\mathbf{y}_t$  est un vecteur de dimension  $n_1(n_2 + 1)p \times 1$ , et  $\mathbf{\Lambda}_0$ ,  $\mathbf{\Lambda}_1$  et  $\mathbf{\Lambda}_{-1}$  sont des matrices carrés de même dimension que  $\mathbf{y}_t$ . Il résulte alors immédiatement que l'expression équivalente à l'équation (6.2) est :

$$\mathbf{y}_t = -\mathbf{\Lambda}_0^{-1} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{\Lambda}_0^{-1} \mathbf{\Lambda}_{-1} E(\mathbf{y}_{t+1} | \mathbf{\Omega}_t) + \tilde{\mathbf{v}}_t \quad (6.3)$$

ou encore, nous pouvons ré-écrire l'équation (6.3) avec une notation plus simple :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}E(\mathbf{y}_{t+1}|\Omega_t) + \mathbf{w}_t \quad (6.4)$$

où les dimensions sont devenues comme suit :  $\mathbf{y}_t$  et  $\mathbf{w}_t$  sont des vecteurs de dimension  $m \times 1$ , et  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices de dimension  $m \times m$ , avec  $m = n_1(n_2 + 1)p$ . Pour le reste de la section, nous concentrons notre analyse sur la version compacte de (6.1) donnée par (6.4).

## 1.2 Une revue de quelques méthodes de résolution

Nous présentons quelques méthodes disponibles dans la littérature pour la résolution des modèles linéaires multivariés à anticipations rationnelles. Ces méthodes de résolution diffèrent par leur degré de généralité, et peuvent être regroupées en deux catégories. Les méthodes du premier groupe sont valables quand les coefficients des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  dans (6.4) et le processus générateur des variables forçantes sont soumis à certaines restrictions. Les méthodes de résolution discutées dans les travaux d'Hansen & Sargent (1981a) coïncident avec cette catégorie. Ces méthodes de résolution ne sont donc pas généralement applicables à (6.4). Un deuxième groupe de méthodes de résolution, est suggéré par Whiteman (1983), Salemi (1986) et Broze, Gourriéroux & Szafarz (1985 & 1990). Ces méthodes de résolution sont plus généralisées pour être appliquées à (6.4) et n'exigent pas des restrictions spécifiques sur les coefficients des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  dans (6.4). Dans ce qui suit, nous fournissons une revue de quelques méthodes de résolution qui font partie de la deuxième catégorie. Nous sommes loin de présenter une liste exhaustive des méthodes de résolution des modèles multivariés à anticipations rationnelles. Nous nous contentons de considérer les procédures les plus répandues dans la littérature appliquée.

### 1.2.1 Méthodes des coefficients indéterminés

Les méthodes de résolution proposées par Whiteman (1983) et Salemi (1986) sont basées sur l'approche des coefficients indéterminés et exploitent deux principes de base avancés par Muth (1961). D'abord, ces méthodes se limitent aux processus stochastiques des variables forçantes qui ont une covariance linéaire, régulière et stationnaire. Ainsi, ils admettent une représentation de Wold. Ensuite, nous sommes contraints *a priori* d'écrire les solutions comme des combinaisons linéaires des processus fondamentaux des variables forçantes en respectant l'indépendance par rapport au temps. C'est-à-dire que la classe des solutions considérées est de la forme  $\mathbf{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$ , où la matrice de coefficients  $C_j$  ne dépend que de  $j$  mais elle est totalement indépendante du temps  $t$  et elle satisfait la condition  $\sum_{j=0}^{\infty} \text{tr} C_j C_j' < \infty$ . Sans perte de généralité, le processus  $\mathbf{w}_t$  est présenté sous forme de représentation moyenne mobile (MA) :

$$\mathbf{w}_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \equiv A(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (6.5)$$

où les  $A_j$  sont de dimension  $m \times m$ ,  $A(L) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j$  est une matrice polynomiale des opérateurs de retard à l'infini, et  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  est de dimension  $m \times 1$ . Les solutions de (6.4) sont alors obtenues par recherche dans la classe suivante :

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \equiv C(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (6.6)$$

En utilisant une notation d'opérateur de retard, (6.4) peut être ré-écrit comme suit :

$$E((\mathbf{I}_m - \mathbf{B}L^{-1} - AL)\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\Omega}_t) = \mathbf{w}_t. \quad (6.7)$$

Depuis (6.6), l'anticipation rationnelle (ou encore le prédicteur optimal) de  $\mathbf{y}_{t+1}$  conditionnellement à  $\mathbf{\Omega}_t$  est donné par :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{\Omega}_t) &= C_1\boldsymbol{\varepsilon}_t + C_2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \dots & (6.8) \\ &= L^{-1}(C(L) - C_0)\boldsymbol{\varepsilon}_t. \end{aligned}$$

En remplaçant (6.5), (6.6), et (6.8) dans (6.7), nous obtenons :

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{B}L^{-1} - AL) C(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t = (-\mathbf{B}C_0L^{-1} + A(L)) \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (6.9)$$

Les méthodes de Whiteman (1983) et de Salemi (1986) diffèrent comme suit : Whiteman utilise la technique de "*transformation-z*" encore appelée la "*décomposition-QZ*", alors que la technique adaptée par Salami se dirige plutôt vers des techniques directes d'inversion de matrice.

Nous considérons, dans un premier temps, la méthode de "*transformation-z*" de Whiteman. Les polynômes de retard de part et d'autre dans l'équation (6.9) doivent être égaux pour toutes les réalisations de  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Ainsi, la "*transformation-z*" doit correspondre à la fonction analytique suivante :

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{B}z^{-1} - Az) C(z) = -\mathbf{B}C_0z^{-1} + A(z). \quad (6.10)$$

La prochaine étape consiste à factoriser le polynôme caractéristique associé au terme à gauche de l'équation (6.10). Sous certaines conditions, nous pouvons considérer la forme normale de Smith : Si le déterminant de  $(\mathbf{I}_m z - \mathbf{B}z - Az^2)$  est non nul dans le cercle unitaire et admet des racines distinctes, alors il est possible de factoriser  $\mathbf{I}_m z - \mathbf{B}z - Az^2$  dans  $S(z)T(z)$ , où  $S(z) = S_0 + S_1z$ ,  $T(z) = T_0 + T_1z$  et  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $T_0$  et  $T_1$  sont des matrices de dimension  $m \times m$ . Dans cette factorisation, toutes

les racines de  $\det(S(z)) = 0$  et de  $\det(T(z)) = 0$  seront distinctes et se situeront respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unitaire. Egalisons  $S(z)T(z)$  avec le terme se trouvant à gauche de l'équation (6.10), nous pouvons écrire alors :

$$T(z)C(z) = S(z)^{-1}(-BC_0z^{-1} + A(z))z \tag{6.11}$$

Whiteman propose de calculer l'inverse de  $S(z)$  en utilisant l'algorithme d'Emre et Hüsseyin (1975), utilisé aussi par Hansen et Sargent (1981a). Cet algorithme utilise l'identité  $S(z)^{-1} = \text{adj}(S(z))/\det(S(z))$ . Ceci nous permet d'écrire :

$$S(z)^{-1} = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{N_j}{z - z_j} \tag{6.12}$$

où  $z_1, z_2, \dots, z_{m_1}$  sont les racines de  $\det(S(z)) = 0$ , les matrices de dimension  $m \times m$  :  $N_1, N_2, \dots, N_{m_1}$  sont des fonctions de  $\text{adj}(S(z_j))$ , et  $m_1$  est le nombre des racines de  $\det(\mathbf{I}_m z - \mathbf{B}z - Az^2) = 0$  qui se situent à l'intérieur du cercle unitaire.

En utilisant l'expression de  $S(z)^{-1}$ , (6.11) peut être écrit comme suit :

$$T(z)C(z) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{N_j}{z - z_j} (-BC_0 + A(z)z) \tag{6.13}$$

Cependant,  $C(z)$  doit exister pour tout  $|z| < 1$ , alors l'équation (6.13) suppose implicitement quelques restrictions sur  $C_0$ . En particulier, elle doit vérifier que :

$$(z - z_j) T(z)C(z)|_{z=z_j} = N_j (-BC_0 + A(z_j)z_j) = 0_{m \times 1}, \quad j = 1, 2, \dots, m_1 \tag{6.14}$$

Par équivalence, nous obtenons le système d'équations de dimension  $(m_1 m)$  :

$$\begin{pmatrix} N_1 A(z_1) z_1 \\ \vdots \\ N_{m_1} A(z_{m_1}) z_{m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{m_1} \end{pmatrix} BC_0, \tag{6.15}$$

qui peut être résolu en  $C_0$ . La solution<sup>3</sup> pour  $C_0$  est unique si  $m_1 = m$  [Sargan (1984) l'appelle le cas 'régulier']. Ceci peut être remarqué en notant que le rang de :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{m_1} \end{pmatrix} B$$

est inférieur ou égal au minimum de  $(m_1, m)$ , conformément aux arguments standard de l'algèbre linéaire. En outre, il y a une multiplicité de solutions à covariances stationnaires de (6.4) si  $m_1 < m$  (le cas 'irrégulier') et aucune solution à covariance stationnaire n'existe si  $m_1 > m$ . En combinant (6.13) et les restrictions (6.15), nous obtenons une expression économétriquement implémentable<sup>4</sup>. Si la solution est unique, elle sera donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{y}_t = T(L)^{-1} \sum_{j=1}^m N_j \left( \frac{LA(L) - z_j A(z_j)}{L - z_j} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.16}$$

où en utilisant (6.5),  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  peut être obtenu en terme de variables observables  $w_t$  en inversant  $A(L) : \boldsymbol{\varepsilon}_t = A(L)^{-1} w_t$ . Dans le cas où nous disposons de solutions multiples,  $(m - m_1)$  racines doivent être inversibles pour aboutir à une factorisation appropriée de  $\mathbf{I}_m z - \mathbf{B}z - Az^2$  dans  $S(z)T(z)$ .

Nous exposons à présent l'implémentation de la méthode des coefficients indéterminés due à Salemi (1986). En considérant l'équation (6.9), une solution, si elle existe, se présentera sous la forme suivante :

$$\mathbf{y}_t = (-B + I_m - AL^2) (-BC_0 + A(L)L) \boldsymbol{\varepsilon}_t. \tag{6.17}$$

L'implémentation de l'équation (6.17) nécessite d'une part le calcul de l'inverse

---

<sup>3</sup>Elle est la solution par conséquent à l'équation (6.4).

<sup>4</sup>Pour plus de détails de développement, voir Whiteman (1983).

de  $(-B + I_m - AL^2)$  au préalable et conformément à la procédure de Whiteman (1983). D'autre part, il faut obtenir les restrictions sur  $C_0$ . La première tâche peut être accomplie assez facilement en utilisant des méthodes récursives standards. Nous remplaçons l'inverse de  $(-B + I_m - AL^2)$  par le polynôme des retards d'ordre infini  $(H_0 + H_1L + H_2L^2 + \dots)$ , où  $(H_0, H_1, \dots \text{ect})$  sont des matrices de dimension  $(m \times m)$ , et par conséquent, nous avons l'écriture suivante :

$$(-B + I_mL - AL^2) (H_0 + H_1L + H_2L^2 + \dots) = I_m. \quad (6.18)$$

Les matrices  $(H_0, H_1, \dots \text{ect})$  sont données conformément à la relation recursive suivante (nous supposons toujours que  $B$  est non-singulière) :

$$H_i = -B^{-1} (H_{i-1} - AH_{i-2}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.19)$$

où  $(H_0 = -B^{-1})$  et  $(H_i = 0_m)$  pour  $(i < 0)$ .

Salemi (1986) pose deux hypothèses pour obtenir les restrictions sur  $C_0$  : le déterminant de  $(-B + I_mL - AL^2)$  est non nul dans le cercle unitaire, et  $B$  est de plein rang. Si  $B$  est non singulière, nous pouvons multiplier le polynôme des retards (6.9) par  $B^{-1}$  pour obtenir :

$$(-B^{-1}L - I_m - B^{-1}AL^2) C(L) = -C_0 + B^{-1}A(L)L. \quad (6.20)$$

Ce qui peut être d'une manière équivalente représenter comme suit :

$$\begin{aligned} & \left( \left( \begin{array}{cc} -I_m & 0_m \\ 0_m & -I_m \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} B^{-1} & -B^{-1}A \\ I_m & 0_m \end{array} \right) L \right) \begin{pmatrix} C(L) \\ C(L)L \end{pmatrix} \\ = & \left( \left( \begin{array}{cc} -C_0 & 0_m \\ 0_m & I_m \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} B^{-1}A(L) & 0_m \\ 0_m & I_m \end{array} \right) L \right) \begin{pmatrix} I_m \\ 0_m \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

ou en écriture plus compacte :

$$(I_{2m} - GL) \Theta(L) = (K_0 + K_1(L)L)P \quad (6.22)$$

où  $G$ ,  $K_0$ , et  $K_1$  sont des matrices de dimension  $(2m \times 2m)$ , et la matrice des polynômes des retards  $\Theta(L)$  et la matrice  $P$  sont de dimension  $(2m \times m)$ . Cette transformation est particulièrement utile pour distinguer les trois cas de solution (aucune solution à covariance stationnaire, une et une seule solution à covariance stationnaire et solutions multiples à covariance stationnaire). Il est aisément possible d'illustrer ceci par le simple fait que l'équation (6.4) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} E(y_{t+1}|\Omega_t) \\ y_t \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} - PA(L)\varepsilon_t. \quad (6.23)$$

Il est simple à remarquer que le système (6.23) n'admet aucune solution à covariance stationnaire si plus que  $m$  valeurs propres de :

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix},$$

[avec  $G_1$  et  $G_2$  sont deux matrices de dimension  $(m \times 2m)$ ] sont en dehors du cercle unitaire, puisque dans ce cas la composante  $(y_t - G_2 y_{t-1})$  sera explosive en valeur. Si exactement  $m$  valeurs propres de  $G$  se situent en dehors du cercle unitaire, une seule et unique solution existera (c'est le cas dit '*régulier*'). Pour le cas '*irrégulier*', si plus que  $m$  valeurs propres de  $G$  se positionnent à l'intérieur du cercle unitaire, alors une multiplicité de solutions existeront. Pour les deux cas '*régulier*' et '*irrégulier*', le polynôme caractérisant la solution est donné par :



$$\Theta(L) = (I_{2m} - GL)^{-1} (K_0 + K_1(L)L)P. \quad (6.24)$$

D'après l'équation (6.24), nous pouvons obtenir les restrictions imposées sur  $C_0$ . Nous procédons à la diagonalisation<sup>5</sup> de  $G$  sous forme de  $H^{-1}JH$  (où les valeurs propres de  $G$  sont placées dans la diagonale de  $J$  dans l'ordre décroissant basé sur leur modules), et nous ré-écrivons alors (6.24) comme suit :

$$\Theta(L) = K_0P + H^{-1} (I_{2m} + JL + J^2L^2 + \dots) (JHK_0 + HK_1)PL. \quad (6.25)$$

Ainsi, nous pouvons obtenir les restrictions exactes sur  $C_0$  [Pour plus de détails des calculs, voir Salemi (1986) et Salemi et Song (1992)].

### 1.2.2 Les méthodes de différence de martingale

Broze, Gouriéroux & Szafarz (1990) ont introduit ce qu'ils ont appelé la "*Méthode de l'opérateur adjoint*". C'est une extension de leurs travaux de 1985 sur la méthode de différence de martingale dans un contexte multivarié. L'idée fondamentale est de remplacer des anticipations rationnelles par leurs réalisations augmentées par la réalisation de la différence de martingale du processus<sup>6</sup>. La méthode de l'opérateur adjoint fera appel aux propriétés du polynôme caractéristique du système d'équation résultant. Reconsidérons de nouveau le système d'équations (6.4). Nous remplaçons, alors  $E(y_{t+1}|\Omega_t) = y_{t+1} - \xi_{t+1}$ , dans le système d'équations (6.4), où chaque composante de  $\xi_{t+1}$  est un processus de différence de martingale par rapport à l'ensemble d'information  $\Omega_t$ . Nous obtenons ainsi :

---

<sup>5</sup>Pour simplifier la tâche, nous supposons comme Salemi (1986) que les éléments de  $G$  sont indépendants.

<sup>6</sup>Un survey complet des procédures de différences de martingale est proposé par Williams (1991).

$$y_t - Ay_{t-1} - By_{t+1} = w_t - B\xi_{t+1}. \quad (6.26)$$

Le polynôme caractéristique de (6.26) est donné par :

$$\Xi(L) = -B + I_m L - AL^2. \quad (6.27)$$

Broze, Gouriéroux & Szafarz (1990) procèdent à la multiplication de part et d'autre de l'équation (6.26) retardée d'une période par la matrice adjointe de  $\Xi(L)$ ,  $\Upsilon(L)$  pour obtenir :

$$L^{m_1} \Phi(L) y_t = -\Upsilon(L) B \xi_t + \Upsilon(L) w_{t-1}, \quad (6.28)$$

où  $L^{m_1} \Phi(L) = \det(\Xi(L))$  et  $m_1$  est égale au nombre de racines<sup>7</sup> de  $[\det(\Xi(L))]$ .

Remplaçons  $B$  dans l'équation (6.28) par son expression déduite de l'équation (6.27).

Puis, nous multiplions par  $L^{-m_1}$ , l'équation (6.28) peut être ré-écrite comme suit :

$$\Phi(L)y_t - L^{-m_1} \Upsilon(L) \Xi(L) \xi_t = -\Upsilon(L) (I_m L - AL^2) \xi_{t+m_1} + \Upsilon(L) w_{t+m_1-1}; \quad (6.29)$$

ou encore avec une écriture plus compacte :

$$\Phi(L) (y_t - \xi_t) = -\Upsilon(L) (I_m L - AL^2) \xi_{t+m_1} + \Upsilon(L) w_{t+m_1-1}. \quad (6.30)$$

Il est à noter que le terme à gauche de (6.30) ne dépend que de l'ensemble des informations dont on dispose<sup>8</sup> à la date  $(t-1)$ . Ainsi, il faut, comme le suggèrent Broze, Gouriéroux & Szafarz (1990), que le terme à droite de (6.30) doit vérifier ce qui suit :

---

<sup>7</sup> Ainsi,  $\Phi(0) \neq 0$ .

<sup>8</sup> En particulier, nous avons :  $y_t - \xi_t = E(y_t | \Omega_{t-1})$ .

$$\begin{aligned}
& E \left( (-\Upsilon(L) (I_m L - AL^2) \xi_{t+m_1} + \Upsilon(L) w_{t+m_1-1}) \mid \Omega_{t-1} \right) \quad (6.31) \\
& = -\Upsilon(L) (I_m L - AL^2) \xi_{t+m_1} + \Upsilon(L) w_{t+m_1-1}.
\end{aligned}$$

Toutes les solutions du modèle à anticipations rationnelles (6.4) sont ainsi calculées en trouvant les différences de martingale  $\xi_t$  satisfaisant (6.31). Ainsi, les solutions pour  $y_t$  du système d'équations (6.26) seront déterminées en termes de  $w_t$  et  $\xi_t$ .

### 1.2.3 La méthode de l'équation quadratique déterminante

Après avoir passé en revue quelques méthodes de résolution de modèles linéaires et multivariés à anticipations rationnelles, nous exposons à présent une méthode récente proposée par Blinder & Pesaran (1994) que nous considérons la plus générale et la plus pratique. La résolution de ce genre de modèle en utilisant la méthode de Blinder & Pesaran (1994), non seulement donnera lieu à toutes les solutions possibles, mais en plus, les auteurs proposent une méthode d'implémentation de ces solutions pour pouvoir les exploiter dans le cadre d'une modélisation estimable empiriquement. En outre, cette nouvelle procédure a l'avantage d'imposer aux variables d'intérêt (*forcing variables*) des hypothèses considérablement plus faibles que les méthodes discutées dans les sections précédentes. La difficulté principale pour obtenir une solution pour (6.4) réside toujours dans la dépendance simultanée de  $y_t$  à l'instar de ses valeurs passées et futures (anticipées). Blinder et Pesaran commencent leur procédure en transformant les équations dans (6.4) de sorte que le système résultant en termes de variables transformées dépende seulement des valeurs futures anticipées et puisse être résolu en utilisant soit la méthode de martingale développée et exposée dans Pesaran (1981 & 1987), soit une variante de la méthode de différence de martingale de Broze, Gouriéroux & Szafarz (1985) présentée dans

la section précédente. D'abord, nous présentons la transformation de (6.4) pour un système impliquant seulement des valeurs anticipées. Ensuite, nous présentons la solution générale du système transformé. Enfin, nous décrivons l'exécution empirique de cette méthode.

### 1.2.3.1 La décomposition du système

Considérons le vecteur de la transformation basée sur une quasi-différence :

$$Y_t = y_t - Cy_{t-1}, \tag{6.32}$$

où  $C$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$ . En effet, cette transformation décomposera la solution de (6.4) en composante retardée '*backward*' ( $y_{tb}$ ) et en composante anticipée '*forward*' ( $y_{tf}$ ) :  $y_t = y_{tb} + y_{tf}$ , où  $y_{tb} = Cy_{t-1}$ , et  $y_{tf} = Y_t$ . Nous cherchons à déterminer  $C$ . En utilisant le fait que  $E(Y_{t+1}|\Omega_t) = E(y_{t+1}|\Omega_t) - Cy_t$  et en substituant (6.32) dans (6.4), nous obtenons :

$$(I_m - BC)Y_t = BE(Y_{t+1}|\Omega_t) + (BC^2 - C + A)y_{t-1} + w_t. \tag{6.33}$$

Ce qui caractérise implicitement la matrice  $C$  présentée dans (6.32) comme solution à l'équation de matrices polynômiales de second ordre :

$$BC^2 - C + A = 0_m. \tag{6.34}$$

Nous supposons que  $(I_m - BC)$  soit non singulière, pour que nous puissions multiplier par son inverse de part et d'autre de (6.33) :

$$Y_t = FE(Y_{t+1}|\Omega_t) + W_t, \tag{6.35}$$

où,

$$F = (I_m - BC)^{-1} B \tag{6.36}$$

et,

$$W_t = (I_m - BC)^{-1} w_t \tag{6.37}$$

Le système (6.35) qui dépend maintenant seulement des anticipations futures, peut être résolu en utilisant la méthode de martingale ou celle de la différence de martingale.

### 1.2.3.2 La solution générale

La solution générale de (6.35) est intimement dépendante de l'inversibilité de  $B$ .

Nous allons distinguer les deux cas de figures :

*1<sup>er</sup> cas : B est inversible*

Quand  $B$  est non-singulière, ainsi que  $F$ , alors la solution générale de (6.35) est donnée par :

$$Y_t = - \sum_{j=1}^{t-1} F^{-j} W_{t-j} + F^{-t} \mathcal{M}_t, \tag{6.38}$$

En remplaçant  $Y_t$  dans (6.32), nous obtenons :

$$y_t = C y_t - \sum_{j=1}^{t-1} F^{-j} W_{t-j} + F^{-t} \mathcal{M}_t, \tag{6.39}$$

où  $\mathcal{M}_t$  représente le vecteur du processus de martingale comprenant  $m$  processus de martingale distincts conditionnellement à l'ensemble de l'information disponible  $\Omega_t$ . Ainsi, indépendamment des valeurs propres de  $F$ , il y a une multiplicité de

solutions caractérisées par  $m$  processus de martingales en  $\mathcal{M}_t$ . Blinder & Pesaran (1994) fournissent une caractérisation alternative de cette multiplicité :

*Proposition<sup>9</sup> : Si  $y_t^0$  est la solution de (6.4), alors Blinder et Pesaran (1994) montrent qu'on peut écrire que  $y_t^1 = y_t^0 + C(y_{t-1}^1 - y_{t-1}^0) + F^{-t}\mathcal{M}_t$ , où  $\mathcal{M}_t$  est un vecteur de processus de martingale.*

Selon la position des valeurs propres de  $F$  sur le cercle unitaire, la solution générale de (6.39) peut être écrite sous différentes formes. D'abord, nous supposons que toutes les valeurs propres de  $F$  se situent à l'intérieur du cercle unitaire. Considérons une séquence de variables aléatoires  $\{W_t\}$  satisfaisant :

$$E(W_t'W_t) \leq k, \quad t = 0, 1, 2, \dots \tag{6.40}$$

Pour une certaine constante finie  $k$ , la somme  $\sum_{i=1}^{\infty} F^i W_i$  existe. En outre,  $\{\mathcal{M}_t^f\}$  est défini comme suit :

$$\mathcal{M}_t^f = \mathcal{M}_t - E\left(\sum_{i=1}^{\infty} F^i W_i | \Omega_t\right), \tag{6.41}$$

La résolution de (6.41) pour  $\mathcal{M}_t$  et la substitution dans (6.39) nous permette d'écrire la solution 'forward' :

$$y_t = C y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} F^i E(W_{t+i} | \Omega_t) + F^{-t} \mathcal{M}_t^f, \tag{6.42}$$

Si Gouriéroux, Laffont & Monfort (1982) imposent une condition additionnelle sur la solution,  $\sup_t E|y_t| < \infty$ , alors la composante  $F^{-t}\mathcal{M}_t^f$  dans (6.42) doit disparaître pour que la solution n'explose pas quand  $t \mapsto \infty$ . Pour cela, il est à noter que si  $Y_t^0 = y_t^0 - C y_{t-1}^0$  et  $Y_t^1 = y_t^1 - C y_{t-1}^1$  sont les solutions de (6.4), alors

---

<sup>9</sup>Voir Blinder et Pesaran (1994) pour la démonstration de la proposition.

nous avons  $Y_t^* = Y_t^0 - Y_t^1 = F^{-t} \mathcal{M}_t$ , et  $E |Y_t^*| = |F^{-t}| E |\mathcal{M}_t|$ . Egalement, pour chaque composante  $\mathcal{M}_t^j$  de  $\mathcal{M}_t$ , étant donné qu'elles représentent des processus de martingale ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), nous avons  $E |\mathcal{M}_t^j| \leq E |\mathcal{M}_{t+1}^j| \leq E |\mathcal{M}_{t+2}^j| \leq \dots$ . Ainsi, avec toutes les valeurs propres de  $F$  se positionnant à l'intérieur du cercle de l'unité, le seul choix de  $\mathcal{M}_t^j$ , pour lequel  $E |Y_t^*|$  est finie, sera  $\mathcal{M}_t^j = 0$  pour tout  $t$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Cela implique que  $Y_t^0 = Y_t^1$  alors, nous pouvons écrire que  $(I_m - CL)(y_t^0 - y_t^1) = 0_{m \times 1}$  tant que toutes les racines de  $C$  se situent à l'intérieur du cercle unitaire. Par conséquent, la solution unique et stable est donnée :

$$y_t = C y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} F^i E (W_{t+i} | \Omega_t). \tag{6.43}$$

Deuxièmement, nous pouvons obtenir également une solution ‘backward’, quand toutes les valeurs propres de  $F$  se trouvent en dehors du cercle unitaire. Considérons que  $\{W_t\}$  satisfasse la condition (6.40), alors la somme  $\sum_{i=0}^{\infty} F^{-i} W_{-i}$  existe. Nous définissons :

$$\mathcal{M}_t^b = \mathcal{M}_t + \sum_{i=0}^{\infty} F^{-i} W_{-i}. \tag{6.44}$$

Analogiquement à la démarche pour la partie ‘forward’, il est simple de remarquer que  $\mathcal{M}_t^b$  est aussi un vecteur de processus de martingale. En remplaçant  $\mathcal{M}_t$  par son expression de (6.44) dans (6.39), la solution ‘backward’ s’écrit comme suit :

$$y_t = C y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} F^{-i} W_{-i} + F^{-t} \mathcal{M}_t^b. \tag{6.45}$$

Il convient de noter que puisque nous supposons que toutes les valeurs propres de  $F$  se trouvent en dehors du cercle unitaire, on ne peut donc pas éliminer les composantes de martingale  $F^{-t} \mathcal{M}_t^b$  dans (6.45) par le biais d’un critère de stabilité.

Par conséquent, les solutions stables se caractérisent par des choix arbitraires pour les  $m$  composantes de  $\mathcal{M}_t^b$ .

Enfin, nous supposons que  $F$  dispose de  $m_1$  ( $\neq 0$ ) valeurs propres à l'intérieur et  $m_2$  ( $\neq 0$ ) ( $m_1 + m_2 = m$ ) valeurs propres à l'extérieur du cercle unitaire. Intuitivement, pour obtenir une caractérisation de la solution générale (6.39) correspondant à la représentation (6.43) et (6.45), nous devons résoudre la partie 'forward' de (6.35) qui est associée aux valeurs propres de  $F$  se situant à l'intérieur du cercle unitaire, et la partie 'backward' de (6.35) qui est associée aux valeurs propres de  $F$  se trouvant à l'extérieur du cercle unitaire. Ceci sera possible en utilisant la forme normale de Jordan, à savoir  $F = T\Lambda T^{-1}$ , où :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{f_1} & 0_{m_1 \times m_2} \\ 0_{m_2 \times m_1} & \Lambda_{f_2} \end{pmatrix}, \tag{6.46}$$

avec  $T$  est une matrice non-singulière de dimension  $(m \times m)$ ,  $\Lambda_{f_1}$  (qui est d'ordre  $m_1 \times m_1$ ) est le bloc associé aux valeurs propres de  $F$  qui se situent à l'intérieur du cercle unitaire, et  $\Lambda_{f_2}$  (qui est d'ordre  $m_2 \times m_2$ ) est le bloc associé aux valeurs propres de  $F$  qui se situent à l'extérieur du cercle unitaire. En utilisant (6.46), nous pouvons ré-écrire (6.35) sous la forme de deux blocs séparés d'équations :

$$\bar{Y}_{t1} = \Lambda_{f_1} E(\bar{Y}_{t+1,1} | \Omega_t) + \bar{W}_{t1}, \tag{6.47}$$

$$\bar{Y}_{t2} = \Lambda_{f_2} E(\bar{Y}_{t+1,2} | \Omega_t) + \bar{W}_{t2}, \tag{6.48}$$

où,

$$\bar{Y}_t = T^{-1}Y_t, \quad \bar{W}_t = T^{-1}W_t, \quad \bar{Y}_t = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{t1} \\ \bar{Y}_{t2} \end{pmatrix}, \quad \bar{W}_t = \begin{pmatrix} \bar{W}_{t1} \\ \bar{W}_{t2} \end{pmatrix}.$$



À présent, nous pouvons obtenir la solution ‘forward’ pour (6.47) et la solution ‘backward’ pour (6.48). Cependant, nous pouvons considérer une procédure alternative pour obtenir la solution de (6.48) en utilisant la technique de la différence de martingale. La solution générale de (6.48), analogiquement à (6.38), est donnée par :

$$\bar{Y}_{t2} = - \sum_{j=1}^{t-1} \Lambda_{f_2}^{-j} \bar{W}_{t-j,2} + \Lambda_{f_2}^{-t} \mathcal{M}_{t2}, \tag{6.49}$$

où  $\{\mathcal{M}_{t2}\}$  est un vecteur de processus de martingale d’ordre  $m_2$ . Après la résolution de (6.49) pour  $\mathcal{M}_{t2}$ , nous évaluons l’expression déduite de la même équation à la date  $(t - 1)$ . Nous obtenons ainsi :

$$\bar{Y}_{t2} = \Lambda_{f_2}^{-j} \bar{Y}_{t-1,2} - \Lambda_{f_2}^{-1} \bar{W}_{t-1,2} + \xi_t, \tag{6.50}$$

où  $\xi_t = \Lambda_{f_2}^{-t} (\mathcal{M}_{t2} - \mathcal{M}_{t-1,2})$  est le processus de différence de martingale d’ordre  $m_2$ . En combinant (6.50) avec la solution ‘forward’ de (6.47), la caractérisation alternative de la solution générale, dans le cas où  $F$  possède  $m_1$  racines à l’intérieur et  $m_2$  racines en dehors du cercle unitaire, est donnée par :

$$y_t = (C + Q) y_{t-1} - Q C y_{t-2} - Q W_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} G_i E(W_{t+i} | \Omega_t) + D_t, \tag{6.51}$$

où,

$$Q = T \begin{pmatrix} 0_{m_1} \times 0_{m_1} & 0_{m_1} \times 0_{m_2} \\ 0_{m_2} \times 0_{m_1} & \Lambda_{f_2}^{-1} \end{pmatrix} T^{-1}, \quad G_i = T \begin{pmatrix} \Lambda_{f_1}^i & 0_{m_1} \times 0_{m_2} \\ 0_{m_2} \times 0_{m_1} & 0_{m_2} \times 0_{m_2} \end{pmatrix} T^{-1}$$

et,

$$D_t = T \begin{pmatrix} \Lambda_{f_1}^{-t} \mathcal{M}_{t1}^f \\ \xi_t \end{pmatrix}.$$

*2<sup>ème</sup> cas : B n’est pas inversible*

Quand  $B$  est singulière, il est nécessaire de considérer la forme normale de Jordan pour  $F$ , en distinguant les blocs correspondants aux valeurs propres nulles de celui

composé de valeurs propres non nulles de  $F$ . Considérons la transformation résultant de (6.35) pour le cas général respectivement des  $m_1$  valeurs propres de  $F$  qui se situent à l'intérieur du cercle unitaire, des  $m_2$  valeurs propres qui se trouvent à l'extérieur du cercle unitaire, et des  $m_3$  valeurs propres nulles ( $m_1 + m_2 + m_3 = m$ ). La forme normale de Jordan pour  $F$  dans ce cas est donnée par  $F = T\Lambda T^{-1}$ , où :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{f_1} & 0_{m_1 \times m_2} & 0_{m_1 \times m_3} \\ 0_{m_2 \times m_1} & \Lambda_{f_2} & 0_{m_2 \times m_3} \\ 0_{m_3 \times m_1} & 0_{m_3 \times m_2} & \Lambda_{f_3} \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

$T$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$ ,  $\Lambda_{f_1}$  (une matrice d'ordre  $m_1 \times m_1$ ) est le bloc associé aux valeurs propres de  $F$  se situant à l'intérieur du cercle unitaire,  $\Lambda_{f_2}$  (qui est d'ordre  $m_2 \times m_2$ ) représente le bloc associé aux valeurs propres de  $F$  se situant à l'extérieur du cercle unitaire, et  $\Lambda_{f_3}$  (qui est d'ordre  $m_3 \times m_3$ ) est le bloc correspondant aux valeurs propres de  $F$  qui sont nulles. En utilisant (6.52), nous pouvons ré-écrire (6.35) sous la forme de trois blocs d'équations :

$$\bar{Y}_{t1} = \Lambda_{f_1} E(\bar{Y}_{t+1,1} | \Omega_t) + \bar{W}_{t1}, \quad (6.53)$$

$$\bar{Y}_{t2} = \Lambda_{f_2} E(\bar{Y}_{t+1,2} | \Omega_t) + \bar{W}_{t2}, \quad (6.54)$$

$$\bar{Y}_{t3} = \Lambda_{f_3} E(\bar{Y}_{t+1,3} | \Omega_t) + \bar{W}_{t3}, \quad (6.55)$$

où,

$$\bar{Y}_t = T^{-1}Y_t, \quad \bar{W}_t = T^{-1}W_t, \quad \bar{Y}_t = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{t1} \\ \bar{Y}_{t2} \\ \bar{Y}_{t3} \end{pmatrix}, \quad \bar{W}_t = \begin{pmatrix} \bar{W}_{t1} \\ \bar{W}_{t2} \\ \bar{W}_{t3} \end{pmatrix}.$$

Les systèmes d'équations (6.53) et (6.54) ont la même solution générale.

Cependant, la solution générale de (6.55) est donnée par :

$$\bar{Y}_{t3} = \Lambda_{f_3}^j E(\bar{Y}_{t+j,3} | \Omega_t) + \sum_{i=0}^{j-1} \Lambda_{f_3}^i E(\bar{W}_{t+i,3} | \Omega_t) \quad (6.56)$$

avec  $\Lambda_{f_3}^j$  est définie telque, pour  $j > 0$ ,  $\Lambda_{f_3}^j = 0_{m_3}$  pour  $j \geq m_3$ , (rappelons que  $m_3$  est la dimension de la matrice  $\Lambda_{f_3}$ ). Nous pouvons ré-écrire (6.56) comme suit :

$$\bar{Y}_{t3} = \sum_{i=0}^{m_3-1} \Lambda_{f_3}^i E(\bar{W}_{t+i,3} | \Omega_t). \quad (6.57)$$

En combinant les solutions générales pour les trois blocs de (6.53) à (6.55). Après avoir remplacé  $Y_t$  dans (6.32), nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_t = & (C + Q)y_{t-1} - QCy_{t-2} - QW_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} G_i E(W_{t+i} | \Omega_t) \\ & + \sum_{i=0}^{m_3-1} H_i E(W_{t+i} | \Omega_t) + D_t, \end{aligned} \quad (6.58)$$

où

$$\begin{aligned} Q &= T \begin{pmatrix} 0_{m_1} \times 0_{m_1} & 0_{m_1} \times 0_{m_2} & 0_{m_1} \times 0_{m_3} \\ 0_{m_2} \times 0_{m_1} & \Lambda_{f_2}^{-1} & 0_{m_2} \times 0_{m_3} \\ 0_{m_3} \times 0_{m_1} & 0_{m_3} \times 0_{m_2} & \Lambda_{f_3} \end{pmatrix} T^{-1}, \\ G_i &= T \begin{pmatrix} \Lambda_{f_1}^i & 0_{m_1} \times 0_{m_2} & 0_{m_1} \times 0_{m_3} \\ 0_{m_2} \times 0_{m_1} & 0_{m_2} \times 0_{m_2} & 0_{m_2} \times 0_{m_3} \\ 0_{m_3} \times 0_{m_1} & 0_{m_3} \times 0_{m_2} & 0_{m_3} \times 0_{m_3} \end{pmatrix} T^{-1}, \\ H_i &= T \begin{pmatrix} 0_{m_1} \times 0_{m_1} & 0_{m_1} \times 0_{m_2} & 0_{m_1} \times 0_{m_3} \\ 0_{m_2} \times 0_{m_1} & 0_{m_2} \times 0_{m_2} & 0_{m_2} \times 0_{m_3} \\ 0_{m_3} \times 0_{m_1} & 0_{m_3} \times 0_{m_2} & \Lambda_{f_3}^i \end{pmatrix} T^{-1}, \\ \text{et } D_t &= T \begin{pmatrix} \Lambda_{f_1}^{-t} \mathcal{M}_{t1}^f \\ \xi_t \\ 0_{m_3} \times 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si la solution vérifie le critère de stabilité, alors  $D_t$  associée au vecteur du processus de martingale doit être nul presque sûrement. Par conséquent, la solution générale stable donnée par (6.58) aura une multiplicité d'ordre  $m_2$ . La solution peut être encore spécifiée si  $m_1$  ou  $m_2$  étaient nuls.

### 1.2.3.3 Implémentation de la méthode de l'équation quadratique déterminante

L'application de la méthode basée sur l'équation quadratique déterminante posera deux problèmes pratiques. Premièrement, la matrice  $C$  (et par conséquent, la matrice  $F$ ) définie par la matrice de l'équation quadratique (6.34), de matrice doit être calculée. Deuxièmement, la partie '*forward*' de la solution, indiquée par des expressions telles que  $\sum_{i=0}^{\infty} F^i E(W_{t+i}|\Omega_t)$  dans l'équation (6.43),  $\sum_{i=0}^{\infty} G_i E(W_{t+i}|\Omega_t)$  dans (6.51), et  $\sum_{i=0}^{\infty} G_i E(W_{t+i}|\Omega_t) + \sum_{i=0}^{m_3-1} H_i E(W_{t+i}|\Omega_t)$  dans (6.58), doivent être calculées au préalable.

D'abord, nous résolvons le problème de calcul de  $C$  et nous présentons plusieurs méthodes. Une première procédure simple consiste à obtenir une solution en appliquant des méthodes numériques directement à (6.34). Il suffit de lancer une procédure itérative avec une estimation arbitraire de  $C$  telle que  $C_0$  est la valeur initiale et en utilisant les relations récursives  $C_r = (I_m - BC_{r-1})^{-1} A$ , où  $C_r$  est la valeur de  $C$  à la  $r^{\text{ème}}$  itération ( $r = 1, 2, \dots$ ). Une telle procédure peut être très sensible aux conditions initiales utilisées. Cependant, nous pouvons obtenir un algorithme alternatif si nous considérons que chaque valeur propre  $\lambda_c$  d'une solution  $C$  de (6.34) satisfait le déterminant de l'équation quadratique :

$$\det(B\lambda_c^2 - I_m\lambda_c + A) = 0 \quad (6.59)$$

Il est à rappeler qu'il y a  $m$  valeurs propres. Une fois que nous disposons d'une solution pour les valeurs propres, nous pouvons calculer celles correspondant à  $C$  (en utilisant  $(B\lambda_c^2 - I_m\lambda_c + A)e_j = 0, j = 1, 2, \dots, m$ ). La forme canonique est représentée soit par la matrice diagonale composée par les valeurs propres sur tout le long de

la diagonale (si les vecteurs propres sont indépendants), soit par la forme normale de Jordan (si au moins deux vecteurs propres sont dépendants). Il est simple de calculer  $C$  quand tous les vecteurs propres sont indépendants. Dans ce cas, il existe une matrice  $T$  de dimension  $(m \times m)$  telle que  $T^{-1}AT = \Lambda_a$  et  $T^{-1}BT = \Lambda_b$ , où  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sont des matrices diagonales dont les éléments qui composent leurs diagonales sont les valeurs propres respectivement de  $A$  et  $B$ . L'équation (6.34) devient alors :

$$\Lambda_b T^{-1} C^2 T - T^{-1} C T + \Lambda_a = 0_m \tag{6.60}$$

Nous choisissons les solutions de  $C$  à (6.60) de manière à ce que  $(T^{-1}C^2T)$  et  $(T^{-1}CT)$  soient diagonaux. Nous obtenons alors :

$$\Lambda_b \Lambda_c^2 - \Lambda_c + \Lambda_a = 0_m \tag{6.61}$$

qui est une simple alternative à (6.59) pour calculer les valeurs propres de  $C$ .

À présent, il est nécessaire de caractériser la partie ‘forward’ de la solution [i.e., les termes tels que  $\sum_{i=0}^{\infty} F^i E(W_{t+i} | \Omega_t)$  dans (6.43)] sous une forme d’ordre fini, pour pouvoir déterminer l’expression complète de la solution de  $y_t$ . Nous reprenons la suggestion de Blinder & Pesaran (1994) qui consiste à considérer une méthode récursive pour mettre en application cette tâche, qui représente une alternative à la formule optimale de prévision de Wiener-Kolmogorov, discutée par Whittle (1963) et considérée plus tard par Hansen & Sargent (1980 & 1981b). Il est à signaler que l’approche de Whittle nécessite que le processus  $\{W_t\}$  soit linéaire ou gaussien et ce n’est pas le cas de notre procédure. La méthode itérative de Blinder et Pesaran est également intéressante parce qu’elle permet d’exprimer les espérances des anticipations futures des variables forçantes en fonction des informations courantes.

Pour illustrer un exemple du déroulement de cette procédure, nous allons considérer l'équation (6.43) supposée satisfaire la condition de stabilité. La décomposition de (6.43) en une partie ‘backward’ et en une partie ‘forward’ peut se traduire comme suit :

$$y_t = y_{1b} + y_{1f} \quad \text{où} \quad y_{1b} = Cy_{t-1}, \quad y_{1f} = \sum_{i=0}^{\infty} F^i E(W_{t+i}|\Omega_t). \quad (6.62)$$

Pour le choix arbitraire de la valeur terminale  $y_{t+N+1,f} = \bar{y}_f$ ,  $N$  est alors choisi tel que  $\|F^{N+1}\bar{y}_f\| < \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un vecteur arbitraire de petits nombres positifs. Alors, l'équation (6.62) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} y_{t+N,f} &= Fy_{t+N+1,f} + E(W_{t+N}|\Omega_t), \\ &\vdots \\ y_{t,f} &= Fy_{t+1,f} + E(W_t|\Omega_t). \end{aligned} \quad (6.63)$$

D'une manière récursive, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_{t+N,f} &= F(F\bar{y}_f + E(W_{t+N}|\Omega_t)) + E(W_{t+N-1}|\Omega_t), \\ &= F^2\bar{y}_f + FE(W_{t+N}|\Omega_t) + E(W_{t+N-1}|\Omega_t), \\ &\vdots \\ y_{t,f} &= F^{N+1}\bar{y}_f + F^N E(W_{t+N}|\Omega_t) + F^{N-1} E(W_{t+N-1}|\Omega_t) \\ &\quad + \dots + FE(W_t|\Omega_t) + E(W_t|\Omega_t). \end{aligned} \quad (6.64)$$

En ré-écrivant l'équation correspondant à la dernière itération, nous obtenons l'équation de la solution :

$$y_{t,f} = F^{N+1}\bar{y}_f + \sum_{i=0}^N F^i E(W_{t+i}|\Omega_t). \quad (6.65)$$

puisque le premier terme de l'équation (6.65) était choisi afin d'être négligeable, la partie ‘forward’ de la solution ne dépendra pas de  $\bar{y}_f$ .

## 2 Estimation Structurelle d'un Modèle Néo-Keynésien Général

Une des questions principales dans l'analyse macro-économique est l'impact des chocs structurels sur la dynamique de l'inflation, de la production et des taux d'intérêt. Une grande partie de l'analyse empirique utilise les systèmes autorégressifs vectoriels [voir Cochrane (1998), Cooley & Dwyer (1998), Bagliano & Favero (1999) et Boivin & Giannoni (2002)]. Dans cette partie, nous examinons l'interaction des chocs structurels exogènes avec le comportement des autorités monétaires et des agents privés dans le contexte d'un nouveau modèle macroéconomique Néo-Keynésien. Nous estimons le modèle structurel complet et nous analysons les propriétés des paramètres structurels. Nous cherchons à déterminer les réponses dynamiques des paramètres structurels aux chocs structurels.

Nous caractérisons l'ensemble de relations macro-économiques par un système des trois équations suivantes : l'équation d'offre (AS), l'équation de demande (IS) et l'équation de la politique monétaire. Nous supposons qu'il n'y a aucune différence informationnelle entre le secteur privé (les ménages) et la banque centrale.

### 2.1 Spécification générale du modèle

#### 2.1.1 La courbe (AS)

La courbe (AS) consiste en une courbe de Phillips représentant la relation entre l'inflation et le produit. Elle est issue du comportement d'optimisation des firmes, celles-ci faisant face à des contraintes d'ajustements de prix. À chaque période, une proportion  $(1 - \alpha)$  des firmes peut modifier son prix. La probabilité d'ajustement est indépendante de l'histoire de chaque firme. Parmi les firmes pouvant modifier leur prix, une partie  $(1 - \omega)$  utilise des anticipations rationnelles et utilise une règle

de fixation des prix tournée vers le futur, ‘*forward-looking*’. Une fraction  $\omega$  utilise elle une règle de fixation des prix tournée vers le passé, ‘*backward-looking*’. Sans perte de généralité, nous considérons l’équation de l’offre (AS) comme elle est formulée par Fuhrer & Moore (1995) :

$$\pi_t = \alpha_{AS} + \delta E_t \pi_{t+1} + (1 - \delta) \pi_{t-1} + \lambda(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_t^{AS} \quad (6.66)$$

$\alpha_{AS}$  est une constante.  $\pi_t$  et  $y_t$  représentent respectivement l’inflation et l’écart de production entre  $(t - 1)$  et  $t$  et  $\varepsilon_t^{AS}$  représente les chocs structurels de l’offre qui sont supposés indépendants et identiquement distribués avec une variance homosédastique  $\sigma_{AS}^2$ .  $E_t$  est l’opérateur des anticipations rationnelles conditionnel à l’ensemble d’informations disponibles à la date  $t$ , qui comporte  $\pi_t, y_t, r_t$  (le taux d’intérêt nominal à la date  $t$ ) et l’ensemble des retards relatifs à ces variables. Comme nous pouvons le remarquer dans l’équation (6.66), l’inflation ne dépend pas seulement de l’inflation future anticipée mais également de l’inflation retardée avec respectivement des poids<sup>10</sup>  $\delta$  et  $1 - \delta$ . Un des avantages de cette spécification est qu’elle capture considérablement la persistance de l’inflation qui est l’un des faits stylisés qui caractérise les dynamiques de inflation de point de vue empirique.

### 2.1.2 L’équation de demande (IS)

L’équation (IS) est issue du comportement d’optimisation des ménages. Ceux-ci cherchent à maximiser leur utilité à travers le temps. Elle décrit donc la composante de la demande de l’économie. L’équation (IS) est fondée sur le modèle de l’agent représentatif. Nous considérons une fonction d’utilité qui comprend des effets d’habitude [voir Abel (1990) et Fuhrer (2000a & 2000b)]. La modification concerne l’impact

---

<sup>10</sup>Pour  $\alpha_{AS} = 0$  et  $\delta = 0.5$ , nous retrouvons la spécification de Fuhrer & Moore (1995).



de la consommation dans la fonction d'utilité [Smets & Wouters (2002)]. La fonction d'utilité s'écrit sous la forme suivante :

$$U(C_t) = \frac{\left(\frac{C_t}{H_t}\right)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \tag{6.67}$$

Où  $C_t$  est le niveau de la consommation agrégée,  $H_t$  est l'effet des habitudes et  $\sigma$  est l'inverse de l'élasticité de substitution. Le niveau des habitudes est exogène dans le sens où le consommateur ne le considère pas comme étant un argument pour maximiser sa fonction d'utilité. Nous supposons que  $H_t = C_{t-1}^h$  *ex post*, où  $h (> 0)$  est une mesure du niveau des habitudes. C'est à la spécification des habitudes que nous devons l'effet de persistance dans la courbe (IS). La contrainte budgétaire des agents est donnée par :

$$C_t + B_t \leq \frac{P_{t-1}}{P_t} B_{t-1} R_t + W_t \tag{6.68}$$

Cette contrainte implique que la consommation des agents à la date  $t$ ,  $C_t$ , augmentée par la valeur de ses capitaux,  $B_t$ , ne doit pas excéder à leurs dotations en chaque période. Ces dotations découlent du revenu du travail,  $W_t$ , augmenté par la valeur réelle de l'exploitation des capitaux dont les agents disposent au début de la période,  $\frac{P_{t-1}}{P_t} B_{t-1}$ , multipliée par le rendement brut nominal sur ces capitaux,  $R_t$ .

Nous supposons que l'agent vivra infiniment et maximisera son utilité sous la contrainte budgétaire (6.68). L'équation d'Euler est donnée par :

$$1 = E_t \left[ \psi \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \frac{P_t}{P_{t+1}} R_t \right] \tag{6.69}$$

où  $P_t$  est le niveau des prix à la date  $t$ . En appliquant le logarithme, nous obtenons l'expression suivante :

$$c_t = \alpha_C + \mu E_t c_{t+1} + (1 - \mu)c_{t-1} - \phi(r_t - E_t \pi_{t+1}) \quad (6.70)$$

où  $\alpha_C = \frac{-\ln(\psi) - \frac{1}{2} V_t(\sigma c_{t+1} + \pi_{t+1})}{\sigma(1+h) - h}$ ,  $c_t$  est le log de la consommation à la date  $t$ ,  $V_t$  est l'opérateur de la variance conditionnelle à la date  $t$ , avec  $\mu = \frac{\sigma}{\sigma(1+h) - h}$  et  $\phi = \frac{1}{\sigma(1+h) - h}$ . Comme nous pouvons le remarquer dans l'équation (6.70), le mécanisme de transmission monétaire est une fonction inverse de l'élasticité de substitution de la consommation,  $\sigma$ , et du paramètre de persistance des habitudes,  $h$ .

D'autre part, nous considérons que la condition de l'équilibre du marché est  $Y_t^* = C_t + G_t$ , où  $Y_t^*$  est l'agrégat principal de la demande et  $G_t$  représente les composantes restantes de la demande, à savoir, l'investissement, dépenses gouvernementales et les exportations nettes. L'écriture logarithmique est donnée par,  $c_t = y_t^* + z_t$ , où  $y_t^*$  est le log du produit intérieur brut "PIB" à la date  $t$  et  $z_t = \log\left(\frac{Y_t^* - G_t}{Y_t^*}\right)$ . Soit,  $y_t^* = y_t^T + y_t$ , où  $y_t^T$  représente le produit potentiel ou la composante tendancielle de  $y_t^*$  et  $y_t$  est l'écart de la production "output gap". Alors, l'équation (6.70) peut se ré-écrire comme suit :

$$y_t = \alpha_C + \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu)y_{t-1} - \phi(r_t - E_t \pi_{t+1}) + g_t \quad (6.71)$$

où  $g_t = -(z_t + y_t^T) + \mu E_t(z_{t+1} + y_{t+1}^T) + (1 - \mu)(z_{t-1} + y_{t-1}^T)$ . Notons que  $y_t$  augmente avec  $G_t$ . Finalement, nous définissons  $\alpha_{IS} = E g_t$ , où  $E$  est l'opérateur des anticipations rationnelles, afin de réécrire l'équation<sup>11</sup> de la courbe (IS) comme :

$$y_t = \alpha_{IS} + \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu)y_{t-1} - \phi(r_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_t^{IS} \quad (6.72)$$

<sup>11</sup>L'équation (6.72) peut aussi être exprimée comme :  $y_t = \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu)y_{t-1} - \phi(r_t - E_t \pi_{t+1} - \bar{r}) + \varepsilon_t^{IS}$ , où  $\bar{r} = \frac{\alpha_{IS}}{\phi}$ .  $\bar{r}$  représente le taux d'intérêt réel d'équilibre de long terme.

où  $\alpha_{IS} = \alpha_C + \alpha_g$  et  $\varepsilon_t^{IS} = g_t - \alpha_g$ . Nous interpréterons  $\varepsilon_t^{IS}$  comme étant un choc exogène à la demande globale<sup>12</sup>. Puisqu'aucune modélisation explicite n'est retenue pour  $G_t$ , nous supposons que les  $G_t$  sont indépendantes et identiquement distribuées avec une variance homosédastique  $\sigma_{IS}^2$ .

À titre comparatif, nous rappelons l'expression de la courbe (IS) classique :

$$y_t = \alpha_{IS} + E_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (r_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_t^{IS} \tag{6.73}$$

Il est à remarquer que dans l'expression de la courbe (IS) classique, il n'existe aucune composante capable de générer de la persistance puisque (6.73) est considérée comme un cas particulier de l'équation générale de la courbe (IS) donnée par (6.72) avec ( $\mu = 1$ ) et ( $h = 0$ ). Par conséquent, la seule composante susceptible de générer la persistance  $y_{t-1}$  s'annule.

### 2.1.3 L'équation de la politique monétaire

L'instrument des autorités monétaires (le taux des fonds fédéraux<sup>13</sup>) est modélisé conformément à la fonction de réaction proposée par Clarida, Galí, et Gertler (2000) :

$$r_t = \rho r_{t-1} + (1 - \rho) r_t^* + \varepsilon_t^{MP} \tag{6.74}$$

$$r_t^* = \bar{r}^* + \beta (E_t \pi_{t+1} - \bar{\pi}) + \gamma y_t \tag{6.75}$$

---

<sup>12</sup>Woodford (2001) précise que le terme  $\varepsilon_t^{IS}$  ne peut pas être interprété en général comme un choc de demande, puisqu'il inclut des chocs dans la composante tendancielle de la production, qui pourraient être dus, par exemple, aux innovations technologiques. Cependant, si l'élimination de la tendance est linéaire, les innovations à la tendance du produit disparaissent de  $\varepsilon_t^{IS}$ , de sorte que le terme  $\varepsilon_t^{IS}$  soit interprété comme choc de demande. Si l'élimination de la tendance de la production est quadratique, une composante déterministe de la tendance persiste dans  $\varepsilon_t^{IS}$ , sa taille est généralement négligeable.

<sup>13</sup>Nous supposons que le taux des fonds fédéraux est un bon proxy du taux d'intérêt de court terme pour le cas des données américaines.

où  $\bar{\pi}$  est le niveau d'inflation d'équilibre de long terme et  $\bar{r}^*$  désigne le taux d'intérêt nominal. Dans cette spécification, nous tenons compte de deux faits. Le taux d'intérêt retardé capture la tendance des autorités monétaires, tandis que  $\bar{r}^*$ , représente la règle de Taylor selon laquelle la Banque Centrale réagit à l'écart entre l'inflation anticipée et son niveau d'équilibre de long terme ainsi à l'écart de la production courant. Par conséquent, l'équation de politique monétaire devient :

$$r_t = \alpha_{MP} + \rho r_{t-1} + (1 - \rho)[\beta E_t \pi_{t+1} + \gamma y_t] + \varepsilon_t^{MP} \quad (6.76)$$

avec  $\alpha_{MP} = (1 - \rho)(\bar{r}^* - \beta \bar{\pi})$  et  $\varepsilon_t^{MP}$  désigne les chocs de la politique monétaire. Nous supposons qu'ils sont indépendants et identiquement distribués avec une variance homosédastique  $\sigma_{MP}^2$ . La règle de politique monétaire dispose de deux cibles. D'une part, les autorités monétaires lissent les taux d'intérêt en considérant un poids  $\rho$  sur le taux d'intérêt passé. D'autre part, elles réagissent à l'inflation prévue  $E_t \pi_{t+1}$  et à l'écart de production par rapport au niveau naturel,  $y_t$ . Le paramètre  $\beta$  mesure comment la banque centrale combat l'inflation prévue, tandis que le paramètre  $\gamma$  décrit sa réaction face aux fluctuations de l'écart de production.

## 2.2 Résolution analytique du modèle

### 2.2.1 Solution du modèle et implications

Dans cette section, nous résolvons le système relatif au modèle (AS-IS-instrument de la politique monétaire) sous l'hypothèse des anticipations rationnelles. Le système macroéconométrique, composé des équations (6.66), (6.72) et (6.76), peut être réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & -(1-\rho)\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{AS} \\ \alpha_{IS} \\ \alpha_{MP} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \phi & \mu & 0 \\ (1-\rho)\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} E_t \begin{bmatrix} \pi_{t+1} \\ y_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} + (6.77)$$

$$\begin{bmatrix} 1-\delta & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \\ r_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{AS}^t \\ \varepsilon_{IS} \\ \varepsilon_{MP} \end{bmatrix}$$

ou encore dans une forme plus compacte :

$$B_{11}X_t = \alpha + A_{11}E_tX_{t+1} + B_{12}X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim (0, D) \quad (6.78)$$

où  $X_t = (\pi_t \ y_t \ r_t)'$ ,  $B_{11}$ ,  $A_{11}$  et  $B_{12}$  sont les matrices de coefficients relatifs aux paramètres structurels et  $\alpha$  est le vecteur des constantes.  $\varepsilon_t$  est le vecteur des erreurs structurelles,  $D$  est la matrice de variance et 0 représente le vecteur zéro de dimension  $(3 \times 1)$ . Sous l'hypothèse des anticipations rationnelles et de symétrie de l'information entre les agents économiques et les autorités monétaires, nous pouvons écrire :

$$X_t = E_tX_{t+1} + v_{t+1} \quad (6.79)$$

où  $v_{t+1}$  est le vecteur des erreurs d'anticipations rationnelles. Après l'application de l'approche standard des coefficients indéterminés, nous pouvons obtenir une solution sous la forme suivante :

$$X_{t+1} = c + \Omega X_t + \Gamma \varepsilon_{t+1} \quad (6.80)$$

où  $c$  est un vecteur de dimension  $(3 \times 1)$  des constantes alors que  $\Omega$  et  $\Gamma$  représentent des matrices de dimension  $(3 \times 3)$ . En remplaçant l'équation (6.80) dans l'équation (6.78), nous pouvons écrire :

$$(B_{11} - A_{11}\Omega)X_t = \alpha + A_{11}c + B_{12}X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.81)$$

Nous supposons la non-singularité de la matrice  $(B_{11} - A_{11}\Omega)$  afin d'assurer l'indépendance linéaire des trois équations structurelles. Si nous multiplions de part et d'autre l'équation (6.81) par  $(B_{11} - A_{11}\Omega)^{-1}$  et nous l'identifions avec l'équation de la forme réduite (6.80), nous obtenons alors ce qui suit :

$$\Omega = (B_{11} - A_{11}\Omega)^{-1}B_{12} \tag{6.82}$$

$$\Gamma = (B_{11} - A_{11}\Omega)^{-1} \tag{6.83}$$

$$c = (B_{11} - A_{11}(\Omega - 1))^{-1}\alpha \tag{6.84}$$

Par conséquent, l'équation (6.80) avec  $\Omega$ ,  $\Gamma$  et  $c$  conformes aux équations (6.82), (6.83) et (6.84) est une solution de l'équation (6.78). Une fois que nous résolvons l'équation (6.82) en fonction de  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  et  $B_{12}$  ; alors,  $\Gamma$  et  $c$  peuvent être facilement calculés. Il est à noter que la forme réduite du modèle structurel est simplement un modèle autorégressif vectoriel de l'ordre 1, VAR(1), avec des restrictions fortement non-linéaires des paramètres structurels. En outre, il y a une relation linéaire simple entre  $\Omega$  et  $\Gamma$  à travers  $B_{12}$ , qui capture la dépendance du système :

$$\Omega = \Gamma B_{12} \tag{6.85}$$

Il est à remarquer aussi qu'il y a une relation linéaire entre les erreurs structurelles,  $\varepsilon_t$  et la forme réduite des erreurs (les erreurs d'anticipations rationnelles),  $v_t$  par  $\Gamma$  :

$$v_t = \Gamma\varepsilon_t \tag{6.86}$$

Un système purement orienté vers le futur, "*forward-looking*", implique  $B_{12} = 0$ , et la forme réduite devient simplement  $X_{t+1} = c + \Gamma\varepsilon_{t+1}$  où  $\Omega = 0$  et  $\Gamma = B_{11}^{-1}$ . Dans ce cas, la dynamique du système structurel sera peu pertinente dans la mesure où elle ne reproduit pas l'effet de la persistance empirique de l'inflation, de l'écart de production et du taux d'intérêt comme le montrent Roberts (1995) et McCallum (2001). Par conséquent, on suppose souvent dans la littérature que les erreurs structurelles sont autocorrélées. Alternativement, quand on considère une approche VAR non structurelle, on utilise souvent des méthodes statistiques de sélection comme les critères d'information<sup>14</sup> (BIC, SIC, YIC ou MIC) pour analyser la politique monétaire afin de choisir un ordre supérieur de la spécification du VAR<sup>15</sup>. Bien que les modèles qui alignent plus d'un retard s'adaptent mieux aux données réelles, leur justification macro-économique ne semble pas être convaincante [Voir Clarida, Galí & Gertler (1999)].

Nous pouvons réécrire l'équation (6.82) comme suit :

$$A_{11}\Omega^2 - B_{11}\Omega + B_{12} = 0 \tag{6.87}$$

Une fois que  $\Omega$  est résolu, les matrices inconnues  $\Gamma$  et  $c$  dans l'équation (6.80) sont tirées directement des équations (6.83) et (6.84). Pour obtenir une solution admissible de  $\Omega$  satisfaisant l'équation (6.87), il faut qu'elle assure une dynamique stationnaire. Puisque  $\Omega$  est une fonction non-linéaire des paramètres structurels dans  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  et  $B_{12}$ , nous pouvons obtenir potentiellement des solutions stationnaires multiples ou encore aucune solution stationnaire. En plus, l'existence de possibles solutions complexes n'est pas une éventualité à exclure. Par ailleurs, la singularité de

---

<sup>14</sup>Pour plus de détails sur les critères d'information, voir le chapitre 4.

<sup>15</sup>Rudebusch & Svensson (1999) considèrent des modèles uniquement avec retards, '*backward-looking*'.

la matrice  $A_{11}$  représente une autre difficulté dans la résolution de l'équation (6.87).

La méthode de (QZ) ou de "transformation-z" est particulièrement pratique quand la matrice  $A_{11}$  est singulière, ce qui est le cas dans notre modèle, et elle permet de déterminer s'il existe une solution stationnaire et à valeur réelle. Spécifiquement, nous définissons les matrices de dimension  $(2n \times 2n)$ ,  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix}$ , où  $n$  est le nombre des variables endogènes. Nous définissons  $\Lambda$  comme une matrice diagonale dont les éléments qui constituent la diagonale sont les valeurs propres et  $S$  est la matrice propre avec chaque colonne correspondant à ses vecteurs propres. Formellement, cette définition s'exprime comme  $BS = AS\Lambda$ . Alors,

$$\Omega = S_{21}\Lambda_{11}S_{21}^{-1} \tag{6.88}$$

est une solution de l'équation (6.87) où  $S_{ij}$  et  $\Lambda_{ij}$  sont respectivement les  $ij^{\text{ème}}$  élément de  $S$  et  $\Lambda$ . Si toutes les valeurs propres de  $\Lambda_{11}$  sont inférieures à l'unité en valeur absolue, alors  $\Omega$  est stationnaire. Si le nombre de valeurs propres généralisées stables est identique à celui des variables prédéterminées (3 dans notre modèle, les variables endogènes retardées), alors il existe une solution unique. S'il y a plus de 3 valeurs propres généralisées stables, alors nous avons des solutions multiples. Réciproquement, s'il y a moins de 3 valeurs propres stables, il n'y aura pas de solution stable. Enfin,  $\Omega$  est réelle si chaque valeur propre dans  $\Lambda_{11}$  est de valeur réelle. Blanchard et Kahn (1980) suggèrent le choix des 3 plus petites valeurs propres et McCallum (1990) suggère le choix, dans le cas où  $B_{12} = 0$ , des valeurs propres qui assure  $\Omega = 0$ . Dans le cas des solutions stationnaires multiples, la méthode récursive de Blinder et Pesaran semble apporter une solution raisonnable au problème. Nous construisons



des séquences avec des matrices convergentes,  $\{C_k, \Omega_k, \Gamma_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$  telles que :

$$\bar{X}_t = C_k E_t \bar{X}_{t+k+1} + \Omega_k \bar{X}_{t-1} + \Gamma_k \varepsilon_t \tag{6.89}$$

où  $\bar{X}_t = X_t - EX_t$ . Alors  $\Omega^*$  est identique à la solution obtenue par la méthode de (QZ) si nous avons :  $\Omega^* \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k$  et  $\Gamma^* \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k$ . Pour que la limite de l'équation (6.89) soit une solution indépendante et finie, il faut que  $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k E_t \bar{X}_{t+k+1}$  soit un vecteur nul. Dans ce cas, la solution doit être de la forme :

$$\bar{X}_t = \Omega^* \bar{X}_{t-1} + \Gamma^* \varepsilon_t \tag{6.90}$$

Enfin, nous vérifions si  $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k E_t \bar{X}_{t+k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k \Omega_k^* = 0$  en utilisant l'équation (6.90). Cette démarche de Blinder et Pesaran est comparable à la méthode (QZ) dans le cas où nous obtenons autant de solutions stationnaires et réelles que de variables endogènes. L'intérêt particulier de cette méthode se manifeste quand nous sommes confrontés à des solutions multiples dont le nombre est supérieur au nombre de variables endogènes.

### 2.3 Maximum de Vraisemblance en Information Complète (FIML)

Nous estimons les paramètres structurels en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance en information complète, FIML, en supposant la normalité des erreurs structurelles. Galí & Gertler (1999) et Clarida, Galí & Gertler (2000) estiment séparément avec une méthode des moments généralisés, GMM, certaines équations que nous étudions<sup>16</sup>. Nous rejoignons Leeper & Zha (2000) qui pensent qu'il est plus raisonnable d'estimer conjointement le modèle dans son ensemble en confrontant

---

<sup>16</sup>Principalement, ils estiment la courbe néo-keynésienne de Phillips.

simultanément le comportement du secteur privé à celui des autorités monétaires (ou la Banque Centrale). La fonction de log-vraisemblance peut être écrite comme suit :

$$\ln L(\theta|\bar{X}_T, \bar{X}_{T-1}, \dots, \bar{X}_1) = \sum_{t=2}^T \left[ -\frac{3}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} (\bar{X}_t - \Omega \bar{X}_{t-1})' (\Sigma)^{-1} (\bar{X}_t - \Omega \bar{X}_{t-1}) \right] \quad (6.91)$$

où  $\theta = (\delta, \lambda, \mu, \phi, \rho, \beta, \gamma, \sigma_{AS}^2, \sigma_{IS}^2, \sigma_{MP}^2)$  représente le vecteur des paramètres structurels et  $\Sigma = \Gamma D \Gamma'$ .  $\Omega$  et  $\Gamma$  peuvent être calculés soit par la méthode (QZ), soit par l'approche de Blinder et Pesaran. Il est à noter qu nous maximisons la fonction de vraisemblance en respectant l'ensemble des contraintes auxquelles les paramètres structurels sont soumis. Par conséquent, étant donné les paramètres structurels, les matrices  $\Omega$  et  $\Gamma$  doivent être calculées à chaque itération. Ceci revient à vérifier pour chaque itération s'il y a une solution stationnaire unique et à valeurs réelles. À la  $i^{\text{ème}}$  itération, si nous sommes confrontés à la situation où il y a des solutions multiples, nous appliquons la méthode récursive pour sélectionner une solution. Nous choisissons les valeurs des paramètres initiaux conformément à celles utilisées dans la littérature<sup>17</sup>.

Nous estimons le modèle pour l'économie américaine avec les données trimestrielles<sup>18</sup> pour la période allant du premier trimestre de l'année 1963 jusqu'au quatrième

<sup>17</sup>Nous nous référons aux travaux empiriques de Galí & Gertler (2000) et Fuhrer & Moore (1995) pour l'initialisation des paramètres de la composante (AS), à ceux de Fuhrer (2000a & 2000b) pour l'initialisation des paramètres de la composante (IS) et enfin à ceux de Clarida, Galí & Gertler (2000) pour l'initialisation des paramètres de la composante de règle monétaire.

<sup>18</sup>Nous exploitons des statistiques disponibles sur le site de la Réserve Fédérale de St. Louis. Les données sont désaisonnalisées.

trimestre de l'année 2002. Nous considérons deux indicateurs pour évaluer l'inflation américaine : l'indice des prix à la consommation (CPI) et le déflateur du produit intérieur brut (DGP-déflateur). Le taux d'inflation est calculé comme le log de la différence entre la valeur de l'indicateur au début du trimestre et sa valeur à la fin du trimestre. Nous considérons le produit intérieur brut pour calculer l'écart de production<sup>19</sup> "output gap", que nous retenons pour représenter l'agrégat de la demande. Nous supposons que le taux des fonds fédéraux est un bon proxy du taux d'intérêt de court terme pour le cas des données américaines.

Mesure d'inflation	Déflateur du PIB		Indice des prix à la consommation	
	1963 :1-1981 :3	1981 :4-2002 :4	1963 :1-1981 :3	1981 :4-2002 :4
$\delta$	0.5275 (0.0183)	0.5451 (0.0199)	0.5344 (0.0179)	0.5865 (0.0196)
$\lambda$	0.0011 (0.0029)	0.0005 (0.0011)	0.0065 (0.0111)	0.0013 (0.0043)
$\mu$	0.5085 (0.0262)	0.4913 (0.0366)	0.5037 (0.0228)	0.4957 (0.247)
$\phi$	0.0103 (0.0093)	0.0089 (0.0071)	0.0149 (0.0128)	0.0028 (0.0032)
$\rho$	0.8593 (0.0194)	0.0817 (0.0412)	0.7389 (0.0632)	0.8401 (0.0284)
$\beta$	0.8158 (0.2133)	1.4683 (0.4781)	1.1024 (0.1038)	1.6642 (0.5582)
$\gamma$	0.1745 (0.1541)	0.6157 (0.3226)	0.7324 (0.2423)	0.5942 (0.3419)
$\sigma_{AS}$	0.6284 (0.0875)	0.5017 (0.0446)	1.1862 (0.1368)	0.0947 (0.1103)
$\sigma_{IS}$	0.6299 (0.0569)	0.4732 (0.0413)	0.7034 (0.0584)	0.4124 (0.0358)
$\sigma_{MP}$	0.7832 (0.0533)	0.5913 (0.0458)	0.8625 (0.0523)	0.7519 (0.0587)

Tableau (6.1) : Résultats I des estimations FIML

<sup>19</sup>Nous utilisons le filtre HP avec un paramètre de lissage de 1600.

Le tableau (6.1) présente les résultats de l'estimation FIML avec les deux mesures de l'inflation, à savoir, l'indice des prix à la consommation et le déflateur du PIB. Cette estimation a été appliquée sur les deux sous périodes avant et après fin 1981. Le modèle estimé, rappelons-le, s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \pi_t = \delta E_t \pi_{t+1} + (1 - \delta) \pi_{t-1} + \lambda (y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_t^{AS} \\ y_t = \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu) y_{t-1} - \phi (r_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_t^{IS} \\ r_t = \rho r_{t-1} + (1 - \rho) [\beta E_t \pi_{t+1} + \gamma y_t] + \varepsilon_t^{MP} \end{cases} \quad (6.92)$$

Les estimations des paramètres dans le tableau (6.1) sont statistiquement significatives à l'exception de  $\phi$  [le coefficient de lissage du taux réel dans l'équation (IS)] et  $\lambda$  [le paramètre de la courbe de Phillips dans l'équation (AS)]. Estrella & Fuhrer (1999), Smets (2000) et Ireland (2001) ont également obtenu des estimations statistiquement non significatives pour ces deux paramètres<sup>20</sup>. Dans l'équation (AS), les agents économiques ont mis plus de poids sur l'inflation prévue que sur l'inflation passée pendant les deux périodes et selon les deux variables considérées pour la mesure de l'inflation, tandis que dans l'équation (IS), ils affectent un poids à peu près identique à l'écart de production prévu et passé pendant les deux périodes. Enfin, les estimations de la fonction de réaction de la politique monétaire reflètent le comportement de lissage de la part de la Fed, car le coefficient de persistance,  $\rho$ , est estimé à un niveau très élevé.

Trois principaux faits stylisés émergent du tableau (6.1). D'abord, les deux écarts type des chocs structurels de (AS) et (IS) sont plus faibles pendant la deuxième période, particulièrement celui correspondant à la composante (IS). Blanchard & Simon

---

<sup>20</sup>Nelson & Nikolov (2002) ont établi un survey plus détaillé des études qui estiment le coefficient de l'équation (IS),  $\phi$ . Selon ces auteurs, les méthodes de rendement bayésien et des distances minimales permettent des estimations plus robustes que celles obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance à information complète, par la méthode des variables instrumentales ou encore par la méthode des moments généralisée.

(2001) et Ahmed, Levin & Wilson (2002) trouvent également des résultats<sup>21</sup> identiques. Dans ce sens, Stock & Watson (2002) stipulent que les chocs structurels ont perdu beaucoup de leur ampleur depuis 1984. En second lieu, la distribution de probabilité de la réaction de la Fed à l'inflation anticipée a évolué dans le sens d'un comportement plus prospectif pendant la deuxième période, mais la différence à travers des estimations n'est pas très significative. À propos de cet aspect, les études sont mitigées. Clarida, Galí & Gertler (1999), avec une simple estimation GMM de l'équation, Lubik & Schorfheide (2002) et Cogley & Sargent (2002), avec une approche bayésienne du maximum de vraisemblance, trouvent des augmentations significatives de la réaction de la Réserve Fédérale à l'inflation. D'autre part, Sims (1999), avec un modèle de changement de régime pour la fonction de réaction et Ireland (2001), dans le cadre d'un système et avec la méthode de vraisemblance à information complète, ne trouvent pas une augmentation significative. Troisièmement, les agents privés ont mis sensiblement plus de poids sur l'inflation prévue dans l'équation (AS) pendant la deuxième période. C'est particulièrement le cas dans les estimations basées sur une mesure du CPI pour représenter l'inflation. Boivin & Giannoni (2002) rapportent également une augmentation de ces paramètres.

Dans le cinquième chapitre, nous nous sommes efforcés à montrer que les années 90 ont été marquées par un changement sensible dans le comportement des agents. En effet, la part des agents économiques orientés vers le passé, "*backward-looking*" a augmenté alors que la part des agents économiques orientés vers le futur, "*forward-looking*". Cette dynamique constaté limite la marge de manœuvre de l'action des autorités monétaires ainsi que l'efficacité des politiques monétaires.

---

<sup>21</sup>Cogley & Sargent (2002) aussi rapportent une diminution de presque 40% dans la variance de leur équation de chômage.

L'objectif de la section suivante est de vérifier empiriquement la validité de ce résultat compte tenu d'un modèle plus représentatif de l'économie.

À présent, nous nous intéressons seulement à la période après Volcker allant du premier trimestre de l'année 1982 au quatrième trimestre de l'année 2002. La fin de l'année 1990 séparera l'échantillon<sup>22</sup> en deux sous-périodes : la première allant du premier trimestre de l'année 1982 au quatrième trimestre constituera la première sous-période et la deuxième allant du premier trimestre de l'année 1991 au quatrième trimestre de l'année 2002 composera la deuxième sous-période. Nous considérons les prix à la consommation comme mesure de l'inflation. Le taux d'inflation est calculé comme le log de la différence entre la valeur de l'indicateur au début du trimestre et sa valeur à la fin du trimestre. Nous retenons les mêmes données utilisées dans la première section de ce chapitre. Donc, les données<sup>23</sup> sont trimestrielles.

---

<sup>22</sup>Nous avons préféré considérer un échantillon plus étendu que celui utilisé lors du cinquième chapitre en employant la méthode des moments généralisée pour deux raisons. D'une part, nous n'avons plus la contrainte de constituer un vecteur de variables instrumentales dont la disponibilité est rare et d'autre part la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance en information complète nécessite un grand nombre d'observations afin de s'assurer de la robustesse de l'estimation.

<sup>23</sup>Nous exploitons des statistiques disponibles sur le site de la Réserve Fédérale de St. Louis. Les données sont désaisonnalisées.

Mesure d'inflation	Indice des prix à la consommation	
Périodes	1982 :1-1990 :4	1991 :1-2002 :4
$\delta$	0.5737 (0.0279)	0.4998 (0.0152)
$\lambda$	0.0053 (0.0089)	0.0006 (0.0046)
$\mu$	0.5407 (0.0215)	0.4955 (0.0163)
$\phi$	0.0065 (0.0083)	0.0009 (0.0017)
$\rho$	0.6989 (0.0215)	0.0875 (0.0314)
$\beta$	1.9682 (0.6103)	1.3673 (0.4781)
$\gamma$	0.5721 (0.4485)	0.6075 (0.4574)
$\sigma_{AS}$	0.6284 (0.0875)	0.5017 (0.0446)
$\sigma_{IS}$	0.3532 (0.1748)	0.1607 (0.1284)
$\sigma_{MP}$	0.9541 (0.0599)	0.6889 (0.0514)

Tableau (6.2) : Résultats II des estimations FIML

L'estimation des paramètres dans le tableau (6.2) sont statistiquement significatives à l'exception toujours des paramètre  $\phi$  et  $\lambda$ . Dans l'équation de la courbe néokeynésienne de Phillips, les agents économiques ont tenu compte plus de l'inflation future que de l'inflation passée pendant les années 80. Pendant la deuxième période, il ressort que le comportement des agents économiques a changé en affectant un poids presque identique aux deux types d'inflation. Dans l'équation (IS), le même scénario se répète puisque les agents intègrent plus de persistance dans leur comportement pendant la deuxième période. En effet, les agents portent moins d'intérêt à l'écart de production futur et l'arbitrage devient alors presque équilibré entre l'écart de production futur et passé. Enfin, les résultats relatifs à la fonction de réaction de la politique monétaire reflètent le comportement de lissage de la part

de la Fed pendant les années 80, car le coefficient de persistance,  $\rho$ , est estimé à un niveau très élevé. Cependant, ce coefficient est estimé à un niveau très bas pendant les années 90, laissant croire que la conjoncture économique favorable qui a marqué les années 90, a dispensé la Réserve Fédérale d'intervenir intensivement.

## Conclusion

L'inclusion des anticipations rationnelles pose un problème à l'économiste qui analyse les politiques monétaires depuis que Sargent & Wallace (1975) ont montré que la politique anticipée devenait totalement inefficace dans un tel contexte. Pour redonner une utilité aux politiques économiques, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires, en particulier sur la rigidité des prix. Les auteurs néo-keynésiens se sont donc efforcés de trouver des justifications théoriques à la rigidité des prix et de les inclure dans les modèles macroéconomiques, en économie fermée.

L'intérêt théorique de cette modélisation réside dans les hypothèses formulées sur l'origine de la rigidité dans l'ajustement des prix des biens. Comme nous l'avons vu aux chapitres 1 et 2, ce sont les travaux de Calvo (1983) qui servent de référence. Des modèles comparables sont obtenus pour l'inflation, à l'exemple notamment de Galí & Gertler (1999). Ce dernier modèle a montré ses qualités dynamiques en tant que modèle à anticipations rationnelles sous l'hypothèse de la rigidité des prix [voir le chapitre 1]. Ces qualités se résument dans le fait que ce modèle soit capable de fournir d'une part de meilleures performances en termes de stabilité et d'autre part une meilleure description de la persistance des chocs qui affectent l'économie. Cependant, le fait de diversifier la périodicité d'ajustement des prix semble influencer sensiblement la calibration des paramètres structurels ce qui nous conduit à douter



de la capacité de ce type de modèle à rendre compte au mieux de la structure de l'économie.

Par ailleurs, la littérature ne donne que peu de fondements théoriques à ce choix : une première réponse est apportée par Fuhrer (1998) qui justifie la nouvelle courbe (IS) par la formation des habitudes dans la fonction de consommation qui confère l'inertie nécessaire aux variables de production. Pour la courbe de Phillips (AS), Roberts (2001) montre que des retards de l'inflation peuvent y apparaître dès lors qu'une fraction de la population forme ses anticipations d'inflation en utilisant un modèle autorégressif univarié qui s'éloigne donc des anticipations rationnelles.

L'objectif a été d'exploiter les fondements microéconomiques des différentes courbes (AS) et (IS) et de les considérer dans un système qui englobe une courbe de l'offre de l'économie, une courbe de la demande de l'économie et une règle de conduite de la politique monétaire. Ce système a permis de tester dans un environnement plus vaste et général les caractéristiques des modèles à rigidité des prix.

Cependant, une difficulté réside dans le fait que le système dont nous disposons soit un système vectoriel, structurel et à anticipations rationnelles. La deuxième section a été réservée à une discussion sur les différentes méthodes de résolution et d'implémentation de ce type de système.

En résolvant le système, nous avons pu le réécrire sous forme autorégressive conjointement à un ensemble de vecteurs de transmission entre la forme réduite et la forme originale. Nous avons estimé le système de la forme autorégressive par la méthode de maximum de vraisemblance en information complète. Dans le contexte d'un modèle néokeynésien, nous avons montré que la volatilité d'inflation de l'indice des prix à la consommation et du déflateur du PIB a diminué parce que le mécanisme interne de propagation a changé dans les années 80 et les années 90.

La deuxième application empirique a consisté à évaluer les spécificités du comportement des agents économiques pendant la période après Volcker en considérant deux sous-périodes autour de la fin de l'année 1990. Le résultat du cinquième chapitre se confirme. En effet, les agents économiques ont changé de comportement lors des années 90. Ils se sont comportés d'une manière moins prospective et plus persistante. Ce changement n'est pas très manifeste en raison d'une conjoncture économique exceptionnelle qui a marqué les années 90.

# Conclusion Générale

L'objectif de cette thèse est de mettre en perspective les apports théoriques et empiriques récents de la modélisation des dynamiques de l'inflation. En effet, depuis les années 1980, ce thème de la macroéconomie monétaire a connu de très nombreux progrès et, dans le même temps, le développement des anticipations rationnelles, en tant qu'application du principe de comportement rationnel à l'acquisition et au traitement de l'information et à la formation des anticipations, a offert une perspective nouvelle en donnant naissance à la Nouvelle Économie Keynésienne.

Le premier chapitre s'est efforcé de démontrer que l'utilisation de prix prédéterminés avec révision aléatoire des trajectoires de prix semble en mesure de reproduire correctement la persistance de l'inflation. Il existe cependant un certain nombre d'éléments tendant à favoriser l'utilisation de prix fixes plutôt que des prix prédéterminés à la Mankiw-Reis. En effet, depuis vingt ans, une quantité considérable de travaux théoriques et empiriques a mis en avant la pertinence de cette hypothèse [voir Taylor (1999)]. Mankiw (2001), lui même, note que l'hypothèse de prix fixes bénéficie d'un fort support théorique et empirique. Un article de Ball, Mankiw & Romer (1988) montre qu'empiriquement, les firmes modifient plus souvent leurs prix lorsque l'inflation moyenne augmente. Ce résultat est compatible avec l'existence de prix fixes et non avec celle de prix prédéterminés. Si les prix sont fixes, les firmes veulent garder le moins longtemps possible leur prix constant lorsque l'inflation est

élevée. Ainsi, la durée moyenne des contrats est moindre. Si les prix sont prédéterminés, le niveau moyen d'inflation n'a aucune incidence sur les choix des firmes, car les prix étant supposés parfaitement flexibles, les firmes peuvent intégrer toute inflation prévisible, quel que soit son niveau.

En outre, une critique du modèle de Fischer réside dans le fait que la persistance des chocs ne dépasse pas la durée maximale des contrats. Le modèle de Mankiw et Reis génère donc une importante persistance de l'inflation uniquement en raison de l'hypothèse simplificatrice mais irréaliste d'une durée maximale des contrats tendant vers l'infini [voir Dotsey, King & Wolman (1999) pour une critique de cette hypothèse] dans le modèle de Calvo. À l'image de Perea (1998), un effort systématique doit être effectué pour vérifier si les différentes hypothèses de rigidité ont toutes les mêmes implications en termes de réactions de l'inflation et du produit suite à un changement de politique monétaire.

Le deuxième chapitre montre que le choix de la périodicité du modèle peut avoir une importance cruciale concernant le degré de persistance de l'inflation lorsque l'hypothèse d'ajustement à la Calvo est utilisée. En effet, la durée des contrats en terme de temps "réel" n'est pas suffisante pour déterminer le degré de rigidité nominale, son effet n'étant pas indépendant de la périodicité choisie. Avoir une chance sur douze de modifier son prix chaque mois ou une chance sur quatre chaque trimestre implique une distribution des contrats de prix différente, même si dans les deux cas, la durée moyenne des contrats est d'une année. Ces différences engendrent une réponse de l'inflation variable suite à un choc sur le taux de croissance de la masse monétaire. L'impact de la périodicité est qualitativement différent selon le type de rigidité nominale choisi. Choisir d'accroître le nombre de périodes dans une année tend à augmenter le degré de persistance lorsque les prix sont prédéterminés

et à le diminuer si les prix sont fixes. Nous avons illustré ce point en simulant une politique de désinflation dans le modèle à prix fixes de Gali & Gertler (1999) et dans le modèle à prix prédéterminés de Mankiw & Reis (2002).

Les exemples développés dans le deuxième chapitre montrent que la périodicité choisie peut influencer sensiblement les performances des modèles, d'autant plus que l'impact de la périodicité des contrats du modèle est endogène. Le choix d'un modèle où la périodicité n'influe pas sur la distribution des contrats, comme dans la structure de Taylor (1980), peut donc être souhaitable. Nous avons illustré également les résultats d'un choc de désinflation sur les modèles de Taylor (1980) et de Fuhrer & Moore (1995) afin de se rendre compte de la dépendance des modèles du type Taylor à la périodicité des contrats dans la réponse de la variable de l'inflation au choc de désinflation.

La seconde partie a cherché à présenter l'analyse spectrale comme outil statistique choisi, utilisé et développé afin de répondre au besoin de l'identification des changements structurels dans les processus inflationnistes. Le chapitre a consisté à exposer l'analyse spectrale de point de vue statistique.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une revue de littérature sur la notion de la densité spectrale issue des processus stationnaires puis non stationnaires. Nous avons présenté dans un premier temps, les théorèmes clefs qui fondent l'analyse spectrale classique et évolutive. Dans un deuxième temps, nous avons recensé les diverses techniques d'estimation de la densité spectrale des données stationnaires. D'autres méthodes d'estimation existent dans la littérature, mais ce sont probablement des extensions parmi les techniques d'estimation présentées dans ce chapitre ou encore elles sont d'avantage axées sur la technique des ondelettes.

Dans le quatrième chapitre, la question de l'instabilité du processus de l'inflation

américaine est soumise à un examen minutieux basé sur certains développements récents dans l'analyse spectrale des processus non stationnaires conjointement à l'emploi d'autres techniques pour tester les autres types de non stationnarité, à savoir, la non-stationnarité en moyenne et en variance. Cette étude est justifiée par le manque d'unanimité sur l'évidence empirique concernant l'instabilité. Le test d'instabilité appliqué sur la densité spectrale que nous avons développé et ensuite employé, a l'avantage de pouvoir attribuer aux ruptures détectées différentes fréquences pouvant nous renseigner ainsi sur le terme de cette rupture (court, moyen ou long terme). Par ailleurs, nous avons appliqué l'algorithme itératif (ICSS) afin d'identifier l'ensemble des accidents survenus dans la série de l'inflation, puisque le test de Inlan & Tiao (1994) permet de tester l'instabilité de la variance en considérant une approche basée sur un CuSum centré des carrés. Nous avons testé également l'instabilité de la moyenne dans le processus de l'inflation américaine. Nous avons utilisé deux techniques : la première est celle des critères d'information et la seconde est celle des tests de Bai et Perron.

Les résultats obtenus sont très significatifs et coïncident avec des faits et des événements économiques assez importants. La seule rupture détectée par notre test à laquelle des fréquences de long terme sont attribuées semble coïncider avec l'année 1981. Cependant, la procédure et la structure de la statistique du test de stationnarité fondé sur la densité spectrale ne permettent pas l'identification d'un seul point de rupture par fréquence [Si un point de rupture existe, alors la relation entre sa fréquence et sa date est parfaitement bijective]. Cette limite nous a poussé à proposer une extension du test en nous inspirant de l'algorithme de Inlan & Tiao (1994) appliqué dans le domaine de l'instabilité de la variance. Notre objectif a été double. D'autre part, nous avons cherché à exploiter la première procédure du test

pour identifier les multiples points de rupture possibles et nous voulons aussi libérer l'un des deux axes de la restriction imposée par le théorème de Priestley afin de pouvoir construire les fenêtres temps et fréquence.

Sans surprise, nous avons identifié les dates majeures qui ont marqué le processus inflationniste aux États-Unis à l'exception d'un point de rupture enregistré fin 1990 et que nous nous sommes efforcés d'expliquer dans les chapitres suivants.

Dans le cinquième chapitre, nous avons étudié les propriétés empiriques de la courbe de Phillips hybride de Galí et Gertler en effectuant une analyse sur les données américaines de 1960 à 1998. Nous avons testé la stabilité des paramètres, en distinguant dans un premier temps deux sous-périodes avec un point de rupture en 1981. Nous avons constaté une rupture statistique dans le coefficient mesurant l'importance du comportement prospectif des agents. Ensuite, nous avons segmenté en deux le régime monétaire démarré en 1982 et nous avons montré qu'une rupture a également lieu en 1990, ceci laissant supposer que la politique de cible d'inflation implicite menée aux États-Unis a un impact en deux temps.

Nos résultats ont également des implications intéressantes concernant la modélisation des processus d'apprentissage de la part des agents. La littérature récente introduisant ce genre de mécanisme suppose un comportement adaptatif de la part des agents lorsque l'environnement économique change, puis un comportement rationnel lorsque le régime est stable. Nos estimations semblent favoriser un comportement inverse. Il semble plus logique d'utiliser le maximum d'informations disponibles et d'adopter un comportement très prospectif lorsque l'environnement économique se modifie, car tout comportement adaptatif se traduit par d'importantes erreurs. En revanche, lorsque l'environnement macroéconomique est assez stable, les coûts de traitement de l'information d'une manière optimale sont moindres, favorisant le re-

cours à des règles de comportement simples. Autrement dit, en 1990, les agents ont changé significativement de comportement pour devenir plus orienté vers le passé, "*backward-looking*" que orienté vers le futur, "*forward-looking*".

Dans le sixième chapitre, l'objectif a été d'exploiter les fondements microéconomiques des différentes courbes (AS) et (IS) et de les considérer dans un système qui englobe une courbe d'offre globale, une courbe de demande globale et une règle de politique monétaire. Ce système nous a permis de tester dans un environnement plus vaste et général les caractéristiques des modèles à rigidité des prix.

Cependant, une difficulté réside dans le fait que le système dont nous disposons soit un système vectoriel et structurel et à anticipations rationnelles. La deuxième section a été réservée à une discussion sur les différentes méthodes de résolution et d'implémentation de ce type de système.

En résolvant le système, nous avons pu le réécrire sous forme autorégressive conjointement à un ensemble de vecteurs de transmission entre la forme réduite et la forme originale. Nous avons estimé le système de la forme autorégressive par la méthode du maximum de vraisemblance en information complète (FIML). Dans le contexte d'un modèle néokeynésien, nous avons montré, d'une part, que la volatilité d'inflation des prix à la consommation et celle du déflateur du PIB ont diminué parce que le mécanisme interne de propagation a changé sensiblement pendant les années 1990, et d'autre part que le résultat, selon lequel un changement structurel a bien eu lieu en 1990, est confirmé après avoir relancé les estimations en ne nous intéressant qu'à la période d'après Volcker et en divisant cet échantillon en deux sous-périodes autour de la fin de l'année 1990. Il en ressort que le principal résultat dans le cinquième chapitre s'est rétabli. En effet, les agents économiques ont changé de comportement vis-à-vis du poids de l'inflation et du produit dans leur considération.



Ils donnent plus confiance dans leur comportement au passé qu'au futur. Un tel constat ne peut être qu'inquiétant pour un banquier central. Lorsque survient un choc d'offre important, la banque centrale risque d'être confrontée à un dilemme. Par exemple, une augmentation significative et prolongée des prix du pétrole peut créer une situation dans laquelle, d'une part, les actions de la banque centrale pour maintenir la stabilité des prix s'opposent à l'objectif consistant à amortir l'incidence récessive directe du choc. D'autre part, une politique monétaire visant le maintien de la stabilité des prix sur le moyen terme doit normalement tenter d'empêcher l'amorce de spirales inflationnistes. Or, le comportement des agents est orienté vers le passé. Cet effet se manifeste par les tentatives des salariés et des entreprises de maintenir inchangés leurs salaires et leurs profits en dépit de la dégradation des termes de l'échange. Dans cette situation, il serait extrêmement difficile de rendre crédible une banque centrale pour reconquérir la confiance d'une partie des agents économiques dont le comportement sera purement prospectif.

Ce travail pourrait être étendu afin d'accorder une place plus importante à la courbe néokeynésienne de Phillips. Son rôle est en réalité de permettre une plus grande efficacité de la conduite de la politique monétaire. Si ses performances sont mis en examen autour de notions comme celles de persistance, périodicité ou changement structurel, il nous paraîtrait particulièrement intéressant d'étendre cet examen à d'autres types d'exercices. Dans cette optique, une importante question s'impose : Quels sont les apports des règles de politique monétaire à la courbe néokeynésienne de Phillips ? Pouvons-nous compter sur des effets compensatoires en tenant compte de ces règles ? Une possibilité d'extension des travaux de cette thèse serait de mettre en évidence les différents effets après la considération des règles monétaires dans la modélisation de la courbe de Phillips. Il serait certainement préférable de multi-

plier les variantes de règles et de préférences dans cet exercice. Dans quelle mesure les résultats obtenus seraient affectés par une préférence plus ou moins marquée de la Banque Centrale pour la stabilisation de l'inflation au détriment de l'activité économique ? Il serait également intéressant de mesurer les conséquences de la prise en compte de diverses règles sur des cibles de prévisions d'inflation, notamment au niveau de l'horizon optimal pour ces prévisions. De nombreuses extensions semblent possibles à partir de ces quelques pistes.

# Bibliographie Générale

Abel, B. A. (1990), "Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses", *American Economic Review*, 80(2), pp. 38-42.

Adak, S. (1998), "Time-Dependent Spectral Analysis of Nonstationary Time Series", *Journal of American Statistical Association*, N°93, pp.1488-1501.

Ahmed, S., A. Levin & B. A. Wilson, (2002), "Recent U.S. Macroeconomic Stability : Good Policies, Good Practices, or Good Luck? ", *International Finance Discussion Paper Series*, N° 730, DC : Federal Reserve Board, Washington.

Ahamada, B. & M. S. Ben Aïssa, (2004a), "Testing Multiple Structural Changes in US Output Gap Dynamics : Non-Parametric Approach", *Finance India*, Vol. XVIII, pp 577-586.

Ahamada, B. et M. S. Ben Aïssa, (2004b), "Changements Structurels dans la dynamique de l'inflation aux États-Unis : Approches non Paramétriques", *Annales d'Economie et de Statistiques* (à paraître).

Ahamada, I. et M. Boutahar, (2002), "Tests for Covariance Stationarity and White Noise, with an Application to Euro/Us Dollar Exchange Rate, an Approach Based on the Evolutionary Spectral Density", *Economics Letters*, 77, pp. 177-186.

Akerlof, G., (2002), "Behavioral Macroeconomics and Macroeconomic Behavior", *American Economic Review*, 92(3), pp. 411-433.

Akerlof, G. & J. Yellen, (1985), "A Near-Rational of the Business Cycle with

Wage and Price Inertia", *Quarterly Journal of Economics*, 100, pp. 823-838.

Akerlof, G., W. Dickens & G. Perry, (1996), "The Macroeconomics of Low Inflation", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 1-59.

Al Sammarie, A. & B. Roberts, (1977), "The Effects of Phases I, II and III on Wages, Prices and Profit Margins in the Manufacturing Sector of the United States", publié dans *Analysis of Inflation 1965-74*, édité par J. Popkin, pp.241-90.

Andrews, D. W. K. (1991), "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation", *Econometrica*, 59, pp. 817-858.

Andrews, D. W. K. (1993), "Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point", *Econometrica*, 61, pp. 821-856.

Andrews, D. W. K. & R. C. Fair, (1988), "Inference in Nonlinear Econometric Models with Structural Change", *Review of Economic Studies*, 55, pp. 615-639.

Andrews, D. W. K. & W. Ploberger (1994), "Optimal Tests when a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative", *Econometrica*, 62, pp. 1383-1414.

Andrews, D. W. K., I. Lee & W. Ploberger (1996), "Optimal Change-point Tests for Normal Linear Regression", *Journal of Econometrics*, 70, pp. 9-38.

Archibald, G. C. & R. G. Lipsey, (1960), "Monetary and Value Theory : Further Comment", *The Review of Economic Studies*, 28, pp. 50-56.

Artis, M. J., R. Bladen-Hovell & D. M. Nachane, (1992), "Instability of Velocity of Money, a New Approach Based on the Evolutionary Spectrum", Cepr discussion paper N° 735.

Bachus, D. & J. Driffill, (1985), "Inflation and Reputation", *American Economic Review*, 75, pp.530-538.

Bagliano, F. C. & C. Favero, (1999), "Measuring Monetary Policy with VAR Models : an Evaluation", *The European Economic Review*, 42, pp. 1069-1112.

Bai, J. (1994), "Least Squares Estimation of a Shift in Linear Processes", *Journal of Time Series Analysis*, 15, pp. 453-472.

Bai, J., R. L. Lumsdaine et J. H. Stock, (1994), "Testing for and Dating Breaks in Integrated and Cointegrated Time Series", *mimeo*, Kennedy School of Government, Harvard University.

Bai, J. & P. Perron, (1998), "Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes". *Econometrica*, 66, pp.47-78.

Bai, J. & P. Perron, (2000), "Multiple Structural Change Models : A Simulation Analysis", à paraître dans *Econometric Essays*, publié par D. Corbea, S. Durlauf & B. E. Hansen, Cambridge University Press.

Bai, J. & P. Perron, (2003a), "Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models", *Journal of Applied Econometrics*, 18, pp.1-22.

Bai, J. & P. Perron, (2003b), "Critical Values for Multiple Structural Change Tests", *Econometrics Journal*, 1, pp.1-7.

Bai, J., R. L. Lumsdaine & J. H. Stock, (1998), "Testing for and Dating Breaks in Stationary and Nonstationary Multivariate Time Series", *Review of Economic Studies*, 65, pp.395-432.

Bakhshin, H. & A. Yates, (1998), " Are UK Inflation Expectations Rational", *Bank of England Working Paper Series*, N°81.

Ball, L. (1994a), "Credible Disinflation with Staggered Price Setting", *American Economic Review*, 84, pp. 282-289.

Ball, L. (1994b), "What Determines the Sacrifice Ratio ?", publié dans *Monetary Policy*, édité par G. Mankiw, University of Chicago Press, Chicago.

Ball, L. (1995), "Disinflation with Imperfect Credibility", *Journal of Monetary Economics*, 35 (1), pp. 5-23.

Ball, L. (1997), "Disinflation and the NAIRU", publié dans *Reducing Inflation : Motivation and Strategy*, édité par C.D. Romer & D.H. Romer, Chicago : University of Chicago Press, pp. 167-194.

Ball, L. (1999), "Aggregate Demand and Long-Run Unemployment", *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, pp. 189-251.

Ball, L., G. Mankiw & D. Romer, (1988), "The New Keynesian Economics and the Output-Inflation Trade-off", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 1-65.

Ball, L. & G. Mankiw, (1994), "A Sticky-price Manifesto", *Carnegie-Rochester Conference on Public Policy*, 41, pp. 127-151.

Ball, L. & G. Mankiw, (1995), "Relative-Price Changes as Aggregate Supply Shocks", *The Quarterly Journal of Economics*, 110(1), pp. 161-193.

Ball, L. & J. Fuhrer, (2000), "Near-rationality and inflation in two monetary regimes", *Federal Reserve Bank of San Francisco*.

Ball, L. & R. Tchaidze, (2002), "The Fed and the New Economy", *American Economic Review Papers and Proceedings*, 92 (2), pp. 108-114.

Ball, L., G. Mankiw & R. Reis, (2004), "Monetary Policy for Inattentive Economies", *Journal of Monetary Economics*, (à paraître).

Barro, R. J. & H. Grossman, (1971), "A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, 61, pp. 82-93.

Barro, R. J. & H. Grossman, (1979), "Money, Employment and Inflation", *Cambridge University Press*, Cambridge.

Barten, A. P. & L. Salvas-Bronsard, (1970), "Two-Stage Least Squares Estimation with Shifts in the Structural Form", *Econometrica*, 38, pp. 938-941.

Baxter, M. & R. G. King, (1999), "Measuring Business Cycles : Approximate Bandpass Filters for Economic Time Series", *Review of Economics and Statistics*,

81, pp. 575–593.

Begg, D. K. H., (1982), "The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics", *Johns Hopkins University Press*, Baltimore.

Ben Aïssa, M. S. & J. Jouini, (2003), "Structural Breaks in the U.S. Inflation Process", *Applied Economics Letters*, 10(10), pp. 633-636.

Ben Aïssa, M. S. & M. Boutahar, (2004), "Use of Spectral Density for Retrospective Detection of Structural Changes", *miméo*.

Ben Aïssa, M. S., M. Boutahar & J. Jouini, (2004), "The Bai & Perron's and Spectral Density Methods for Structural Changes Detection in the U.S. Inflation Process", *Applied Economics Letters*, Vol. 11, N° 2, pp. 109-115.

Ben Aïssa, M. S. & O. Musy, (2004a), "The Impact of Model Periodicity on Inflation Persistence in Sticky Prices and Sticky Information Models", *Document de Travail GREQAM*, N° 2004-28.

Ben Aïssa, M. S. & O. Musy, (2004b), "Persistance de l'Inflation & Régime Monétaire dans la Courbe de Phillips Néo-Keynésienne Hybride", *Document de Travail GREQAM*, N° 2004-49.

Ben Aïssa, M. S. & O. Musy, (2004c), "Persistance et Périodicité dans les Modèles à Prix Fixes et à Prix Prédéterminés", *Document de Travail GREQAM*, N° 2004-48.

Ben Aïssa, M. S. & O. Musy, (2005), "La Persistance de l'Inflation dans les Modèles Néo-Keynésiens", *Recherches Economiques de Louvain* (à paraître).

Benassy, J.-P. (2002), "Output and Inflation Dynamics under Price and Wage Staggering : Analytical Results", *miméo*, CEPREMAP.

Benati, L. (2002), "Investigating Inflation Persistence Across Monetary Regimes", *mimeo*, Bank of England.

Benigno, P. & J. D. Lopez-Salido, (2002), "Inflation Persistence and Optimal

Monetary Policy in the Euro Area", *ECB Working Paper*, 178, FRB International Finance Discussion Paper N°749.

Bekaert, G., C. R. Harvey & R. L. Lumsdaine, (2002), "Dating the Integration World Equity Markets", *Journal of Financial Economics*, 65(2), pp. 203-247.

Berkowitz, J., (2001), "Generalized Spectral Estimation of the Consumption-Based Asset Pricing Model", *Journal of Economics*, 104, pp. 269-288.

Bernanke, B. S. & M. Gertler, (1995), "Inside the Black Box : The Credit Channel of Monetary Policy Transmission", *Journal of Economic Perspectives*, 9-4, pp. 27-48.

Bernanke, B. S., M. Gertler & M. W. Watson, (1997), "Systematic Monetary Policy and the Effects of Oil Price Shocks", *Brooking Papers on Economic Activity*, pp. 91-142.

Bernanke, B. S. & I. Mihov, (1998), "Measuring Monetary Policy", *Quarterly Journal of Economics*, CXIII, pp. 869-902.

Beveridge, S, (1921), "Weather and Harvest Cycles", *Economic Journal*, 31, 429-452.

Beveridge, S. & C. R. Nelson, (1981), "A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of 'Business Cycle'", *Journal of Monetary Economics*, 7, pp. 151-174.

Bhattacharya, P. K. (1994), "Some Aspects of Change-Point Analysis", publié dans *Change point Problems*, édité par Carlstein E., H.-G. Müller & D. Siegmung, IMS Lecture Notes - Monograph Series, 23, pp. 28-56.

Blanchard, O. & C. Kahn, (1980), "The Solution of Linear Difference Equations under Rational Expectations", *Econometrica*, 48, pp. 1305-1312.

Blanchard, O. & N. Kiyotaki, (1987), "Monopolistic Competition and the Effects



of Aggregate Demand", *American Economic Review*, 77, pp. 647-666.

Blanchard, O. & D. Quah, (1989), "The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances", *American Economic Review*, 79(4), pp. 655-673.

Blanchard, O. & S. Fischer, (1989), "Lectures on Macroeconomics", *MIT Press*, Cambridge.

Blanchard, O. & J. Simon, (2001), "The Long and Large Decline in U.S. Output Volatility", *MIT Department of Economics Working Paper*, N°01-29.

Blinder, A. S. (1979), "Economic Policy and the Great Stagflation", *Academic Press*, London and New York.

Blinder, A. S. (1994), "On Sticky Prices : Academic Theories Meet the Real World", publié dans *Monetary Policy*, édité par N. Mankiw, University of Chicago Press, Chicago.

Blinder, A. S. (1997), "Is There A Core of Practical Macroeconomics That We Should All Believe?", *American Economic Review*, 87(2), pp. 240-243.

Blinder, A. S. (1998), "Central Banking in Theory and Practice", *The MIT Press*.

Blinder, A. S. & M. H. (1994), "Multivariate Linear Rational Expectations Models under Asymmetric and Heterogeneous Information", *mimeo*, University of Pennsylvania and University of Cambridge.

Bhattacharya, P. K., (1994), "Some Aspects of Change-Point Analysis", publié dans *Change Point Problems*, édité par E. Carlstein, H.-G. Müller et D. Siegmung, IMS Lecture Notes - Monograph Series, 23, pp. 28-56.

Billingsley, P. (1968), "Convergence of Probability Measures", *Wiley*, New York.

Boivin, J. & M. Giannoni, (2002), "Assessing Changes in the Monetary Transmission Mechanism : A VAR Approach", *Economic Policy Review*, pp. 97-111.

Boivin, J. & M. Giannoni, (2003), "Has Monetary Policy Become More Effective ?

", *NBER Working Paper*, N°9459.

Boldrin, M., L. J. Christiano & J. Fisher, (2001), "Habit Persistence, Asset Returns, and the Business Cycle", *American Economic Review*, 91, pp. 149–166.

Booth, N. B. & A. F. M. Smith, (1982), "A Bayesian Approach to Retrospective Identification of Change-Points", *Journal of Econometrics*, 19, pp. 7-22.

Bosworth, B., & W. Vroman, (1977), "An Appraisal of the Wage-Price Control Program", publié dans "Analysis of Inflation 1965-74", publié dans *Analysis of Inflation 1965-74*, édité par J. Popkin, pp.67-112.

Brillinger, D. R. & P. R. Krishnaiah, (1983), "Time Series in the Frequency Domain", *North Holland*.

Brock, W. A., Dechert, W. D. & J. Scheinkman, (1987), "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *University of Wisconsin-Madison Workshop Paper* N°8702.

Brockwell, P. J. & R. A. David, (1991), "Time Series : Theory and Methods", Second Edition, *Springer Series in Statistics*.

Brown, R. L., J. Durbin & J. M. Evans, (1975), "Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time", *Journal of the Royal Statistical Society*, 37(B), pp. 149-163.

Brown, A. J. & J. Darby, (1985), "World Inflation Since 1950 : An International Comparative Study", Cambridge U.P. for NIESR.

Broze, L., C. Gouriéroux & A. Szafarz, (1985), "Solutions of Linear Rational Expectations Models", *Econometric Theory*, 1, pp. 341-68.

Broze, L., C. Gouriéroux & A. Szafarz, (1990), "Reduced Forms of Rational Expectations Models", *Harwood Academic Publishers*, New York.

Cagan, P. (1956), "Monetary Dynamics of Hyperinflation", dans *Studies in the*

*Quantity Theory of Money*, édité par M. Friedman, University of Chicago Press.

Calvo, G. (1978), "On the Time Inconsistency of Optimal Policy in a Monetary Economy", *Econometrica*, 46, pp. 1411-1428.

Calvo, G. (1983), "Staggered Prices in a Utility Maximising Framework", *Journal of Monetary Economics*, 12, pp. 383-398.

Campbell, J. & N. Mankiw, (1987), "Are Output Fluctuations Transitory? ", *Quarterly Journal of Economics*, 102(4), pp. 857-880.

Caplin, A. & D. Spulber, (1987), "Menu Costs and the Neutrality of Money", *Quarterly Journal of Economics*, 102(4), pp. 703-725.

Caplin, A. & J. Leahy, (1991), "State Dependent Pricing and the Dynamics of Money and Output", *Quarterly Journal of Economics*, 106(3), pp. 683-708.

Capon, J., (1969), "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis", *Proc. IEEE*, 57, pp. 1408-1418.

Cecchetti, S. (1995), "Inflation Indicators and Inflation Policy", *NBER Macroeconomics Annual*, pp. 189-219.

Chadha, J. & P. Schellekens, (1999), "Monetary Policy Loss Functions : Two Cheers for the Quadratic", *Bank of England Working Paper Series*, 101.

Cho, S. & A. Moreno, (2002), "A Structural Estimation and Interpretation of the New Keynesian Macro Model", *mimeo*, Columbia University.

Choi, I. & P. C. B., Phillips, (1993), "Testing for Unit Root by Frequency Domain Regression", *Journal of Econometrics*, 59, pp. 263-286.

Chow, G. (1960), "Tests of Equality Between Sets of Regression Coefficients in Two Linear Regressions", *Econometrica*, 28, pp.591-605.

Chow, G. (1966), "On the Long-Run and Short-Run Demand for Money", *Journal of Political Economy*, 74, pp.111-31.

Christiano, L. J., M. S. Eichenbaum & C. L. Evans, (1997), " Sticky Price and Limited Participation Models of Money : A Comparison", *European Economic Review*, 41, pp. 1201-1249.

Christiano, L. J., M. S. Eichenbaum & C. L. Evans, (2001), " Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy", *NBER Working Papers*, N°8403.

Christiano, L., M. Eichenbaum & C. Evans, (1999), "Monetary Policy Shocks : What Have We Learned and To What End?", publié dans *Handbook of Macroeconomics*, édité par J. Taylor & M. Woodford, Elsevier, Amsterdam.

Clarida, R., M. Gertler & J. Galí, (1999), "The Science of Monetary Policy : A New Keynesian Perspective", *Journal of Economic Literature*, 37-4, pp. 1661-1707.

Clarida, R., M. Gertler & J. Galí, (2000), "Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability : Evidence and some Theory", *Quarterly Journal of Economics*, 115, pp. 147-180.

Cochrane, J. H. (1998), "What do the VARs Measure? Measuring the Output Effects of Monetary Policy", *Journal of Monetary Economics*, 41, pp. 277-300.

Cochrane, J. H. (2000), "Money as Stock : Price Level Determination with No Money Demand", *NBER Working Papers*, N°7498.

Cogley, T. & T. Sargent, (2001), "Evolving post-World War II Inflation Dynamics", *NBER Macroeconomics Annual*, MIT Press, Cambridge, 16(1), pp. 331-373.

Cogley, T. & T. Sargent, (2002), "Drifts and Volatilities : Monetary Policies and Outcomes in the Post WW II U.S.", *mimeo*, New York University.

Cooley, T. F. & M. Dwyer, (1998), "Business Cycle Analysis Without Much Theory : A Look at Structural VARs", *Journal of Econometrics*, 83, pp. 57-88.

Dahlhaus, R. (1996), "Maximum Likelihood Estimation and Model Selection for

Locally Stationary Processes", *Journal of Nonparametric Statistics*, 25, pp. 1-37

Dahlhaus, R. (1997), "Fitting Time Series Models to Nonstationary Processes", *Annals of Statistics*, 25, pp.1-37

Dahlhaus, R. & L. Giratis, (1998), "On the Optimal Segment Length for Parameter Estimates for Locally Stationary Time Series", *Journal of Time Series Analysis*, 19(6), pp. 629-656.

Davidson, R. & J. G. MacKinnon, (1993), "Estimation and Inference in Economics", *Oxford University Press*.

Davidson, R. & J. G. MacKinnon, (2003), "Econometric Theory and Methods", *Oxford University Press*.

Diebold, F. X. & R. S. Mariano, (1995), "Comparing Predictive Accuracy", *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(3), pp. 253-263.

Diebold, F. X., L. E. Ohanian & J. Berkowitz, (1998), "Dynamic Equilibrium Economies : A Framework for Comparing Models and Data", *Review of Economic Studies*, 65, pp. 433-451.

Dotsey, M., R. King & A. Wolman, (1999), "State Dependent Pricing and the General Equilibrium Dynamics of Money and Output", *Quarterly Journal of Economics*, CXIV, pp.655-690.

Dubman, M. R., (1965), "The Spectral Characterization and Comparison of Non-Stationary Processes", *unpublished rocketdyne research report*.

Dupor, B. (2001), "Monetary Policy and Confidence", *mimeo*, University of Pennsylvania.

Emre, E. & Ö. Hüsseyin, (1975), "Generalization of Leverrier's Algorithm to Polynomial Matrices of Arbitrary Degree", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 136.

Estrella, A. & J. Fuhrer (1998), "Dynamic Inconsistencies : Counterfactual Implications of a Class of Rational Expectations Models", *Federal Reserve Bank of Boston Working Papers*, N°98-05.

Estrella, A. & J. Fuhrer (1999), "Are 'Deep' Parameters Stable? The Lucas Critique as Empirical Hypothesis", *Federal Reserve Bank of Boston Working Papers*, N°99-4.

Estrella, A. & F. Mishkin, (1997), "Is There a Role for Monetary Aggregates in the Conduct of Monetary Policy? ", *Journal of Monetary Economics*, 40, pp.279-304.

Fano, R. M., (1950), "Short-Time Autocorrelation Functions and Power Spectra", *Journal of Acoust. Soc. Amer.*, 22, pp. 546-550.

Farmer, R. E. A. & J-T. Guo, (1994), "Real Business Cycles and the Animal Spirits Hypothesis", *Journal of Economic Theory*, 63, pp.42-72.

Favero, C. (2001), "Applied Macroeconometrics", *Oxford University Press*.

Favero, C & R. Rovelli, (2003), "Macroeconomic stability and the preferences of the Fed. A formal analysis", *Journal of Money, Credit and Banking*, 35(4), pp. 545-556

Feldstein, M. (1997), "The Costs and Benefits of Going from Low Inflation to Price Stability", publié dans *Reducing Inflation : Motivation and Strategy*, édité par C. D. Romer & David H. Romer, pp. 123-156. University of Chicago Press, Chicago.

Fischer, S. (1977), "Long-term Contracts, Rational Expectations and the Optimal Money Supply Rule", *Journal of Political Economy*, 85, pp. 191-205.

Fischer, S. (1981), "Towards an Understanding of the Costs of Inflation :II.", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 15, pp. 5-42.

Fischer, S. (1988), "Recent Development in Macroeconomics", *Economic Jour-*

nal, pp. 294-339.

Friedman, M. (1958), "The Supply of Money and Changes in Prices and Output", dans *The Relationship of Prices to Economic Stability and Growth*, DC : U.S. Congress, Joint Economic Committee, Washington.

Friedman, M. (1961), "The Lag in the Effect of Monetary Policy", *Journal of Political Economy*, 69, pp. 447-66.

Friedman, M. (1968), "The Role of Monetary Policy", *American Economic Review*, 58, pp. 1-17.

Friedman, M. (1970), "A Theoretical Framework for Monetary Analysis", *Journal of Political Economy*, 78 (2), pp. 193-238.

Friedman, M. (1977), "Inflation and Unemployment", *Journal of Political Economy*, 85 (3), pp. 451-72.

Friedman, M. (1982), "Monetary Policy : Theory and Practice", *Journal of Money, Credit and Banking*, 14, pp. 98-118.

Friedman, M. (1982), "Monetary Policy : Theory and Practice : A Reply", *Journal of Money, Credit and Banking*, 14, pp. 404-06.

Fuhrer, J. C. (1995), "The Phillips Curve is Alive and Well", *New England Economic Review of the Federal Reserve Bank of Boston*, pp. 41-56.

Fuhrer, J. C. (1997a), "Inflation/Output Variance Trade-Offs and Optimal Monetary Policy", *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, pp. 214-234.

Fuhrer, J. C. (1997b), "The (Un)importance of Forward Looking Behavior in Price Specifications", *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(3), pp. 338-350.

Fuhrer, J. C. (1998), "An Optimizing Model for Monetary Policy Analysis : Can Habit Formation Help? ", *Federal Reserve Bank of Boston Working Papers*, N°98-1.

Fuhrer, J. C. (2000a), "Optimal Monetary Policy in a Model with Habit Forma-

tion", *Federal Reserve Bank of Boston Working Papers*, N°00-05.

Fuhrer, J. C. (2000b), "Habit Formation in Consumption and its Implications for Monetary-Policy Models", *American Economic Review*, 90, pp. 367-389.

Fuhrer, J. C. & G. Moore, (1995), "Inflation persistence", *Quarterly Journal of Economics*, 110(1), pp. 127-160.

Galí, J. & M. Gertler, (1999), "Inflation Dynamics : A Structural Econometric Analysis", *Journal of Monetary Economics*, 44, pp. 195-222.

Galí, J., M. Gertler & D. López-Salido, (2001), "European Inflation Dynamics", *European Economic Review*, 45, pp. 1237-1270.

Galí, J., M. Gertler & D. López-Salido, (2003), "Robustness of the Estimates of the Hybrid New Keynesian Phillips Curve", *Universitat Pompeu Fabra*.

Goodfriend M.(1989), "The Conduct of Monetary Policy", *The Economic Journal*, 99, pp. 293-346.

Goodfriend M.(2003), "Inflation Targeting in the United States?", *NBER Working Papers*, N°9981.

Goodfriend M. & R. King, (1997), "The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy", *NBER Macroeconomics Annual*, pp. 231-283.

Gordon, R. J. (1970), "The Recent Acceleration of Inflation and Its Lessons for the Future", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 8-14.

Gordon, R. J. (1971), "Inflation in Recession and Recovery", *Brookings Papers on Economic Activity*, 3, pp. 105-158.

Gordon, R. J. (1973), "The Response of Wages and Prices to the First and Second Years of Control", *BPEA*, N°3, pp. 765-78.

Gordon, R. J. (1987), "Macroeconomics : fourth edition", *Little, Brown & Company*, New York.



Gordon, R. J. (1990), "What is New-Keynesian Economics? ", *Journal of Economic Literature*, 28, pp. 1115-1171.

Gordon, R. J. (1993), "Macroeconomics", 6<sup>ème</sup> édition, *Haper Collins*, New York.

Gordon, R. J. (1996), "The Time-Varying Nairu and Its Implications for Economic Policy", *NBER Working Papers*, N°5735.

Gouriéroux, C., J. J. Laffont & A. Monfort, (1982), "Rational Expectations in Dynamic Linear Models : Analysis of the Solutions", *Econometrica*, 50, pp. 409-25.

Green, W. H., (1997), "Econometric Analysis", Third Edition, *Macmillan*.

Greenspan A. (1990), Statement before the U.S. Congress, House of Representatives, Subcommittee on Domestic Monetary Policy of the Comity on Banking, Finance and Urban Affairs, *Zero Inflation*, Washington.

Grenander, U. & M. Rosenblatt, (1957), "Statistical analysis of stationary time series", *Wiley*, New York.

Hairault, J-O. & F. Portier, (1993), "Money, New Keynesian Macroeconomics, and the Business Cycle", *Eurepean Economic Review*, 37, pp. 1533-1568.

Hall, R. E. & J. B. Taylor, (1997), "Macroeconomics", Fifth Edition, *W. W. Norton & Company*, New York.

Hansen, L. P. (1982), "Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments Estimator," *Econometrica*, 50 (4), pp. 1029-1054.

Hansen, L. P. & T. J. Sargent, (1980), "Formulating and Estimating Dynamic Linear Rational expectations Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2, pp. 7-46.

Hansen, L. P. & T. J. Sargent, (1981a), "Linear Rational Expectations Models for Dynamically Interrelated Variables", publié dans *Rational Exoectations and Econometric Practice*, édité par Lucas, R. E.& T. J. Sargent, University of Minnesota

Press, Minneapolis.

Hansen, L. P. & T. J. Sargent, (1981*b*), "A Note on Wiener-Kolmogorov Prediction Formulas for Rational Expectations Models", *Economics Letters*, 8, pp. 255-60.

Hansen, L. P. & T. J. Sargent, (1982), "Instrumental Variables Procedures for Estimating Linear Rational Expectations Models", *Journal of Monetary Economics*, 9(3), pp. 263-96.

Hénocq, C. & H. Kempf, (1989), "Quasi-rational Expectations", *Economics Letters*, 33, pp. 93-96.

Hodrick, R. J. & E. C. Prescott, (1980), "Post War U.S. Business Cycles : An Empirical Investigation", *Carnegie-Mellon University*, Discussion Paper N°451.

Hodrick, R. J. & E. C. Prescott, (1997), "Post War U.S. Business Cycles", *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, pp. 1-16.

Horsman, G., (1988), "Inflation in the Twentieth Century : Lessons from Europe and North America", *Harvester-Wheatsheaf. St. Martin's Press*, New York.

Hsu, D. A., R. B. Miller & D. W. Wichern, (1974), "On the Stable Paretian Behavior of Stock Market Prices", *Journal of the American Statistical Association*, 69, pp. 108-113.

Inclan, C. & G. C. Tiao, (1994), "Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance", *Journal of the American Statistical Association*, 89, N°427.

Ireland, P. N. (2001), "Sticky-Price Models of the Business Cycle : Specification and Stability", *Journal of Monetary Economics*, 47, pp. 3-18.

Issing, O. (2001), "Why Price Stability?", publié dans *Why Price Stability?*, édité par Garcia Herrero, A. & al. , Banque Centrale Européenne, Francfort-sur-le-Main.

Johnson, I. C. (1978), "A Revised Perspective of Keynes's General Theory", *Journal of Economic Issues*, XII (3), pp. 561-82.

Jondeau, E. & H. Le Bihan, (2001), "Testing for a Forward-Looking Phillips Curve Additional Evidence From European and US Data", Notes d'Études et de Recherches, N°86, *Banque de France*.

Joyeux, R., (1979), "Harmonic Processus in Economics", Ph.D. Thesis, *University of California*.

Kempf, H. (1984), "Anticipations rationnelles et politique économique", Doctorat d'État de Sciences Economiques, *Université Paris 1 Panthéon Sorbonne*.

Kempf, H. (1986), "Sur le Rôle Stabilisateur des Politiques Monétaire et Budgétaire dans un Modèle avec Anticipations Rationnelles et Dette Publique", *Revue d'Economie Politique*, 96, pp. 642-666.

Kempf, H. (1987), "Irregular Staggered Contracts and Monetary Policy", *European Economic Review*, 31, pp. 1247-1266.

Kempf, H. (1988), "Rational Expectations, Imperfect Price Adjustments and the Optimality of Monetary Policy", *Journal of Economics*, 48, pp. 223-241.

Kempf, H. (1989), "Inflation and Wage Indexation with Multiperiod Contracts : a Comment ", *European Economic Review*, 33, pp. 1397-1404.

Kempf, H. (1991), "Chocs persistants, information imparfaite et indexation des salaires optimale", *Revue Economique*, 42, pp. 5-28.

Kempf, H. (1992a), "Les rigidités nominales - I. Développements récents", *Revue d'Economie Politique*, 102.

Kempf, H. (1992b), "Les rigidités nominales - II. Développements récents", *Revue d'Economie Politique*, 102.

Keynes, J. M. (1936), "The General Theory of Employment, Interest and Money",

*Macmillan*, Londres.

King, M. A. (1997), "The Inflation Target Five Years On", *Bank of England Quarterly Bulletin*, 37, pp. 434-442.

King, M. A. (1997), "Challenges for Monetary Policy : New and Old", publié dans *New Challenges for Monetary Policy*, The Federal Reserve Bank of Kansas City, pp. 11-57.

King, R. G. & E. C. Prescott (1994), "Rules Rather Than Discretion : The Inconsistency of optimal Plans", *Journal of Political Economy*, 85(3), pp. 473-491.

King, R. G. & M. W. Watson. (1994), "The Postwar U.S. Phillips Curve : A Revisionist Econometric History", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 41, pp. 157-219.

Kim, Jinill (2000), "Constructing and Estimating a Realistic Optimizing model of Monetary Policy", *Journal of Monetary Economics*, 45, pp. 329-359.

Klein, P. (2000), "Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, pp. 1405-1423.

Kydland, F. E. & E. C. Prescott, (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50, pp. 1345-1370.

Kydland, F. E. & E. C. Prescott, (1990), "Business cycles : real facts and the monetary myth", *Quarterly Review of Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 14(2), pp. 3-18.

Kydland, F. E. & E. C. Prescott, (1991), "Hours and Employment Variation in Business Cycle Theory", *Economic Theory*, 1, pp. 63-81.

Koujianou-Goldberg, P. & M. Knetter (1997), "Good Prices and Exchange Rates : What Have We Learned ? ", *Journal of Economic Literature*, XXXV, pp. 1243-1272.

Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt & Y. Shin, (1992), "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root : How Sure Are We that Economic Time Series Have a Unit Root ?", *Journal of Econometrics*, 54(1), pp. 159-178.

Leeper E. M. & T. Zha, (2000), "Assessing Simple Policy Rules : A View from a Complete Macro Model", Working Paper N°2000-19, *Federal Reserve Bank of Atlanta*.

Levin, A. & J. M. Piger, (2004), "Is Inflation Persistence Intrinsic in Industrial Economies ?", *European Central Bank Working Paper Series*, N°334.

Levin, M. J., (1964), "Instantaneous Spectra and Ambiguity Functions", *IEEE Tran. Information Theory*, IT(10), pp. 95-97.

Levin F. J. & A-M. Meulendyke, (1982), "Monetary Policy : Theory and Practice : A Comment", *Journal of Money, Credit and Banking*, 14, pp. 399-403.

Levy, D., (2000), "Cointegration in Frequency Domain", *Journal of Time Series Analysis*, 23(3).

Lindé, J. (2000), "Monetary Policy Analysis in Backward-looking Models", *Sveriges Risksbank Working Paper*, N°114.

Lindé, J. (2001a), "Estimating New-Keynesian Phillips Curve : A Full Information Maximum Likelihood Approach", *Sveriges Risksbank Working Paper*, N°129.

Lindé, J. (2001b), "The Empirical Relevance of Simple Forward- and Backward-looking Models : A View from a Dynamic General Equilibrium Model", *Sveriges Risksbank Working Paper*, N°130.

Lipsey, R. G., (1960), "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1862-1957 : A Further Analysis", *Economica*, 27, pp. 1-31.

Lipsey, R. G., (1974), "The Micro Theory of the Phillips Curve Reconsidered : A Reply to Holmes and Smyth", *Economica*, 41, pp. 62-70.

Liu J., S. Wu & J. V. Zidek, (1997), "On Segmented Multivariate Regressions", *Statistica Sinica*, 7, pp. 497-525.

Lomnicki, Z. A. & S. K. Zaremba, (1957), "On the autocorrelation in time series", *Annals of Math. Statist*, 28, pp. 140-158.

Loynes, R. M. , (1968), "On the Concept of the Spectrum for Non-Stationary Processes", *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 30, pp. 1-20.

Lubik, T. A. & F. Schorfheide, (2002), "Testing for Indeterminacy : An Application to U.S. Monetary Policy", *mimeo*, University of Pennsylvania.

Lucas, R. E. (1972), "Expectations and the Neutrality of Money", *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 103-124.

Lucas, R. E. (1973), "Some International Evidence on Output-inflation Trade-offs", *American Economic Review*, 63, pp. 326-336.

Lucas, R. E. (1976), "Econometric Policy Evaluation : A Critique", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1, 1, pp.19-46.

Lucas, R. E. (1980a), "Two Illustrations of the Quantity Theory of Money", *American Economic Review*, LXX(5), pp. 1005-1014.

Lucas, R. E. (1980b), "Methods and Problems in Business Cycle Theory", *Journal of Money, Credit and Banking*, 12(4), pp. 696-715.

Lucas, R. E. (1987), "Models of Business Cycles", *Basil Blackwell*, Oxford.

Lucas, R. E. (2000), "Inflation and Welfare", *Econometrica*, 68, pp. 247-374.

Lucas, R. E. (2003), "Macroeconomic Priorities", *American Economic Review*, 93(1), pp. 1-14.

Lucas, R. E. & T. J. Sargent (1978), "New' Explanations of the Persistence of

Inflation and Unemployment", publié dans *After the Phillips Curve : The Persistence of High Inflation and High Unemployment*, Federal Reserve Bank of Boston, Boston.

Lucas, R. E. & T. J. Sargent (1978), "After Keynesian Macroeconomics", *After the Phillips Curve : The Persistence of High Inflation and High Unemployment*, Federal Reserve Bank of Boston, Boston.

Maddala, G. S. & I-M. Kim, (1998), "Unit Roots, Cointegration, and Structural Change", *Cambridge University Press*, Cambridge.

Mankiw, N. G. (1985), "Small Menu Costs and Large Business Cycles : A Macroeconomic Model", *Quarterly Journal of Economics*, 100(20), pp.529-538.

Mankiw, N. G. (1987), "Comment on JJ. Rotemberg The New Keynesian Microfoundations », publié dans *NBER Macroeconomics Annual*, édité par S. Fischer, NBER and MIT Press, pp. 105-110.

Mankiw, N. G. (1989), "Real Business Cycles : A New Keynesian Perspective", *Journal of Economic Perspectives*, 3, pp. 79-90.

Mankiw, N. G. (1990), "A Quick Refresher Course in Macroeconomics", *Journal of Economic Literature*, 28, pp. 1645- 1660.

Mankiw, N. G. (1991), "The Reincarnation of Keynesian Economics », *NBER Working Paper*, N°3885.

Mankiw, N. G. (1998), "Principles of Economics", Forth Worth, TX : *The Dryden Press*.

Mankiw, N. G. (2000), "Macroeconomics", *Worth Publishers*, New York.

Mankiw, N. G. (2001a), "The Inexorable and Mysterious Tradeoff Between Inflation and Unemployment", *Economic Journal*, 111, C45-C61.

Mankiw, N. G. (2001b), "U.S. Monetary Policy During the 1990s ", *NBER Work-*

ing Paper, N°8471.

Mankiw, N. G. & D. Romer, (1991), "New Keynesian Economics", *MIT Press*, Cambridge.

Mankiw, N. G. & R. Reis, (2001), "Sticky Information : A Model of Monetary Nonneutrality and Structural Slumps", *NBER Working Paper*, N°8614.

Mankiw, N. G. & R. Reis, (2002), "Sticky Information Versus Sticky Prices : A Proposal to Replace the New Keynesian Phillips Curve", *Quarterly Journal of Economics*, 117, pp. 1295-1328.

Mankiw, N. G., J. Wolfers & R. Reis, (2003), "Disagreement about Inflation Expectations", *NBER Working Paper*, N°9796.

McCallum, B. T. (1990), "Real Business Cycle Models," *NBER Working Paper*, N°1393.

McCallum, B. T. (1997), "Comment", *NBER Macroeconomics Annual*, pp. 355-359.

McCallum, B. T. (1999), "Analysis of the Monetary Transmission Mechanism : Methodological Issues", *NBER Working Paper*, N°7395.

McCallum, B. T. (1999), "Role of the Minimal State Variable Criterion in Rational Expectations Models", *International Tax and Public Finance*, 6, pp.621-639.

McCallum, B. T. (2001), "Monetary Policy Analysis in Models Without Money", *NBER Working Paper*, N°8174.

McConnell, M. & G. P. Quiro's, (2000), "Output Fluctuations in the United States : What has Changed Since the Early 1980s", *American Economic Review*, 90, pp. 1464-1476.

Mélard, G., (1978), "Propriétés du Spectre Evolutif d'un Processus Non-Stationnaire", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, B(4), pp. 411-424.



Muth, J. F. (1961), "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", *Econometrica*, 29, pp. 315-335.

Nadiri, M. & V. Gupta, (1977), "Price and Wage Behaviour in the U.S. Aggregate Economy and in Manufacturing Industries", publié dans *Analysis of Inflation 1965-74*, édité par J. Popkin, pp.195-234.

Nelson, E. & K. Nikolov, (2002), "Monetary Policy and Stagflation in the UK", *mimeo*, Bank of England.

Newey, W. K. & K. D. West, (1987), "A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", *Econometrica*, 55, pp. 703-708.

Ombao, H., J. V. Sachs & W. Guo, (2002), "Smoothing Spline ANOVA for Time-Dependent Spectral Analysis", Document de Travail, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain.

Orphanides, A. & R. Porter, (1998), "P\* Revisited : Money-Based Inflation Forecasts with a Changing Equilibrium Velocity", *Finance and Economics Discussion Paper Series*, N°1998-26.DC : Federal Reserve Board, Washington.

Parzen, E., (1961), "An approach to Time Series Analysis", *Annals Math. Stat.*, 32, pp. 951-989.

Pawitan, Y. & F. O'Sullivan, (1994), "Nonparametric Spectral Density Estimation Using Penalized Whittle Likelihood", *Journal of the American Statistical Association*, 89, pp. 600-610.

Pereau, J. C. (1998), "Négociation Salariale en Terme Réel et en Terme Nominal : Une Analyse des Propriétés Dynamiques d'un Modèle avec Contrats Échelonnés", *Recherches Economiques de Louvain*, 3, pp. 293-317.

Perron, P. (1989), "The Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit Root

Hypothesis", *Econometrica* 57, pp. 1361-1401.

Perron, P. & S. Ng, (1998), "An Autoregressive Spectral Density Estimator at Frequency Zero for Nonstationarity Tests", *Econometric Theory*, 14(5), pp. 560-603.

Pesaran, M. H. (1981), "Identification of Rational Expectations Models", *Journal of Econometrics*, 16, pp. 375-398.

Pesaran, M. H. (1987), "The Limits to Rational Expectations", *Basil Blackwell*, Oxford.

Pesaran, M. H. & M. Wickens, (1999), "Handbook of Applied Econometrics, Volume I : Macroeconomics", *Blackwell Handbooks in Economics*.

Pesaran, M. H. & P. Schmidt, (1999), "Handbook of Applied Econometrics, Volume II : Microeconomics", *Blackwell Handbooks in Economics*.

Perry, G. L. (1980), "What Have We Learned about Disinflation?", BPEA, 2, pp. 587-602.

Pivetta, F. & R. Reis, (2004), "The Persistence of Inflation in the United States", Harvard, *mimeo*.

Phelps, E. S. (1967), "Phillips Curves, Expectations of Inflation and Optimal Employment over Time", *Economica*, 34(3), pp.254-81.

Phelps, E. S. (1968), "Money-Wage Dynamics and Labor Market Equilibrium", *Journal of Political Economy*, 76(4), pp. 687-711.

Phelps, E. S. (1978), "Disinflation without Recession : Adaptive Guideposts and Monetary Policy", *Weltwirtschaftliches Archiv*, C, pp.239-265.

Phillips, A. W. (1958), "The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom", *Economica*, 25, pp. 283-299.

Phillips, P. C. B. & S. Ouliaris, (1988), "Testing for cointegration using principal components methods", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, pp. 205-230.

Phillips, P. C. B., S. Ouliaris & D. Corbae, (2002), "Band Spectral Regression with Trending Data", *Econometrica*, 70(3), pp. 1067-1109.

Pisarenko, V. F., (1973), "The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function", *Journal of Royal Astronomical Society*, 33, pp. 347-366.

Ploberger, W. & W. Krämer, (1992), "The CUSUM Test with OLS Residuals", *Econometrica*, 60, pp. 271-285.

Priestley, M. B. (1965), "Evolutionary Spectra and Non-Stationary Processes", *Journal of Royal Statistical Society*, B 27, pp. 204-237.

Priestley, M. B. (1969), "A Test for Non-Stationarity of Time Series", *Journal of Royal Statistical Society*, 31, pp. 140-149.

Priestley, M. B. (1981), "Spectral Analysis and Time Series", *Academic Press*, New York.

Priestley, M. B. (1988), "Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis", *Academic Press*, London.

Priestley, M. B. (1996), "Wavelets and time-dependent spectral analysis", *Journal of Time Series Analysis*, 17, 1, pp. 85-103.

Quandt, R. E., (1958), "The Estimation of Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes", *Journal of the American Statistical Association*, 55, pp. 873-880.

Roberts, J. (1995), "New Keynesian Economics and the Phillips Curve", *Journal of Money, Credit and Banking*, 27, pp. 975-984.

Roberts, J. (1997), "Is Inflation Sticky?", *Journal of Monetary Economics*, 39, pp. 173-96.

Roberts, J. (1998), "Inflation Expectations and the Transmission of Monetary Policy", Finance and Economics Discussion Series N°1998-43, *Board of Governors*

of the Federal Reserve System, Washington.

Roberts, J. (2001), "How Well Does the New Keynesian Sticky-Price Model Fit the Data? ", Finance and Economics Discussion Series N°2001-13, *Board of Governors of the Federal Reserve System*, Washington.

Romer, D. (1993), "The new Keynesian Synthesis", *Journal of Economic Perspectives*, 7(1), pp. 5-22.

Romer, D. (1996), "Advanced Macroeconomics", Mc Graw Hill, New York.

Romer, D. & C. Romer, (1989), "Does Monetary Policy Matter? A New Test in the Spirit of Friedman and Schwartz", *NBER Macroeconomics Annual*, 4, pp. 121-170.

Rotemberg, J. J. (1982), "Sticky Prices in the United States", *Journal of Political Economy*, 90(6), pp. 1187-1211.

Rotemberg, J. J. (1983), "Monetary Policy and Costs of Price Adjustment", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 213(5), pp.267-288.

Rotemberg, J. J. (1987), "The New Keynesian Microfoundations", *Macroeconomics Annual*, 2 , pp. 69-104.

Rotemberg, J. J. (2003), "Stochastic Technical Progress, Smooth Trends, and Nearly Distinct Business Cycles", *American Economic Review*, 93(5), pp. 1543-1559.

Rotemberg, J. J., J. Driscoll & J. Poterba, (1995), "Money, Output, and Prices : Evidence from a New Monetary Aggregate", *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(1), pp. 67-83.

Rotemberg, J. J. & L. Summers, (1990), "Inflexible Prices and Procyclical Productivity", *Quarterly Journal of Economics*, 105, pp. 851-874.

Rotemberg, J. J. & M. Woodford, (1997), "An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy", *NBER Macroeconomics Annual*,

pp. 297-346.

Rotemberg, J. J. & M. Woodford, (1998), "An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy : Expanded Version", *NBER Working Paper*, N°0233.

Rudd J. B. & K. Whelan, (2001), "New Tests of the New-Keynesian Phillips Curve", *Board of Governors of the Federal Reserve Working Paper* N°2001-30. *Journal of Monetary Economics*, (à paraître).

Rudd, J. B. & K. Whelan, (2002), "Does the Labor Share of Income Drive Inflation?", *Federal Reserve Board, Finance et Economics Discussion Series Paper* N°2002-30. *Journal of Money, Credit, and Banking*, (à paraître).

Rudebusch, G. D. (2004), "Assessing the Lucas Critique in Monetary Policy Models", *Journal of Money, Credit, and Banking*, (à paraître).

Rudebusch, G. D. & L. E. O. Svensson (1999), "Eurosystem Monetary Targeting : Lessons from U.S. Data," Working Papers in *Applied Economic Theory*, N°99-13, Federal Reserve Bank of San Francisco.

Sahuc, J. G. (2002), "A "Hybrid" Monetary Policy Model : Evidence from the Euro Area", *Applied Economic Letters*, 9, pp. 949-955.

Salemi, M. K. (1986), "Solution and Estimation of Linear Rational Expectations Models", *Journal of Econometrics*, 53, pp. 245-69.

Salemi, M. K. & J. Song (1992), "Saddlepath Solutions for Multivariate Linear Rational Expectations Models", *Journal of Econometrics*, 53, pp. 245-69.

Samuelson, P. A., (1947), "Foundations of Economic Analysis", *Harvard University Press*, Cambridge.

Samuelson, P. A., (1948), "Economics : an introductory analysis", *McGraw Hill*, New York.

Samuelson, P. A., (1965), "Foreword to the Foundations of Economic Analysis", *Atheneum*, New York.

Samuelson, P. A., (1970), "Reflections on Recent Federal Reserve Policy", *Journal of Money, Credit and Banking*, 2(1), pp. 33-44.

Samuelson, P. A., (1972), "The Consumer Does Benefit From Feasible Price Stability", *The Quarterly Journal of Economics*, 86(3), pp. 476-93.

Samuelson, P. A., (1974), "Lessons from the Current Economic Expansion", *American Economic Review*, 64(2), pp. 75-77.

Samuelson, P. A. & R. M. Solow, (1960), "Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy", *American Economic Review*, 50(2), pp. 177-94.

Sargent, T. J. (1984), "Autoregressions, Expectations, and Advice", *American Economic Review, Papers and Proceedings*, 74, 2, pp. 408-415.

Sargent, T. J. (1987), "Rational Expectations and Inflation", *Academic Press*, New York.

Sargent, T. J. (1987), "Macroeconomic Theory", *Academic Press*, New York.

Sargent, T. J. & N. Wallace, (1975), "'Rational' Expectations, the Optimal Monetary Instrument and the Optimal Money Supply Rule", *Journal of Political Economy*, 83(2), pp. 241-254.

Sbordone, A. M. (2002), "Prices and Unit Labor Costs : A New Test of Price Stickiness", *Journal of Monetary Economics*, 49 (2), pp 265-292.

Schwarz, G. (1978), "Estimating the Dimension of a Model", *Annals of Statistics*, 6, pp. 461-464.

Siklos, P. (2002), "The Changing Face of Central Banking", Cambridge University Press, Cambridge.

Sims, C. A. (1999), "Drifts and Breaks in Monetary Policy", *mimeo*, Princeton

University.

Sims, C. A. (2002), "Solving Linear Rational Expectations Models", *Computational Economics*, 20, pp. 1–20.

Sims, C. A. & T. Zha, (2002), "Macroeconomic Switching", *mimeo*, Princeton University.

Smets, F. (2000), "What Horizon for Price Stability", *ECB Working Paper*, N°24.

Smets, F. & R. Wouters, (2002), "An Estimated Stochastic Dynamic General Equilibrium Model of the Euro Area", *ECB Working Paper*, N°171.

Söderlind, P. (1999), "Solution and Estimation of RE macromodels with optimal policy", *European Economic Review*, 43, pp. 813-823.

Söderlind, P. (2001), "Monetary Policy and the Fisher Effect", *Journal of Policy Modeling*, 23(5), pp. 491-495

Stein, H. (1984), "Presidential Economics : The Making of Economic Policy from Roosevelt to Reagan and Beyond", édité par Simon and Schuster, New York.

Stock, J. H. & M. W. Watson, (1999a), "Forecasting Inflation", *Journal of Monetary Economics*, 44(2), pp. 293-335.

Stock, J. H. & M. W. Watson, (1999b), "Business Cycle Fluctuations in US Macroeconomic Time Series", publié dans *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1A, Chapitre I, édité par Taylor J. B. & M. Woodford, Elsevier, Amsterdam.

Stock, J. H. & M. W. Watson, (2002), "Has the Business Cycle Changed and Why? ", publié dans *NBER Macroeconomics Annual*, édité par M. Gertler & K. Rogoff, *MIT Press*, Cambridge.

Svensson, L. E. O. (2001), "Requiem for Forecase-Based Instrument Rules", *mimeo*, Princeton University.

Taylor, J. B. (1979), "Staggered Wage Setting in a Macro Model", *American*

*Economic Review Papers and Proceedings*, 69, pp.108-113.

Taylor, J. B. (1980), "Aggregate Dynamics an Staggered Contracts", *Journal of Political Economy*, 88, pp. 1-22.

Taylor, J. B. (1981), "On the Relation Between the Variability of Inflation and the Average Inflation Rate", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 15, pp. 57-86.

Taylor, J. B. (1999), "Staggered Price and Wage Setting in Macroeconomics", publié dans *Handbook of Macroeconomics*, édité par J. Taylor & M. Woodford, Elsevier, Amsterdam.

Tjøstheim, D., (1976), "Spectral Generating Operators for Non-Stationary", *Journal of Times Series Analysis*, 21(5).

Trabandt, M. (2003), "Sticky Information vs. Sticky Prices : A Horse Race in a DSGE Framework", *mimeo*, Humboldt University.

Uhlig, H. (1997), "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily", publié dans *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, édité par R. Marimón & A. Scott, Oxford University Press, pp. 30-61.

Von Sachs, R. & M. H. Neumann, (2000), "A Wavelet-Based Test for Stationarity", *Journal of Time Series Analysis*, 21(5), pp. 597-613.

Wallis, K. (1980), "Econometric Implications of the Rational Expectations Hypothesis", *Econometrica*, 48, 1.

Walsh, C. L. (1998), "Monetary Theory and Policy", *MIT Press*, Cambridge.

Whiteman, C. H. (1983), "Linear Rational Expectations Models", A User's Guide, *University of Minnesota Press*, Minnesota.

Whittle, P. (1962), "Gaussian Estimation in Stationary Time Series", *Bulletin of the International Statistical Institute*, 39, pp. 105-129.



Whittle, P. (1963), "Prediction and regulation by Linear Least-Square Methods", *Van Nostrand-Reinhold*, Princeton.

Williams, D. (1991), "Probability with Martingales", *Cambridge University Press*, Cambridge.

Woodford, M. (1996), "Control of The Public Debt : a Requirement for Price Stability", *NBER Working Paper*, N°5684.

Woodford, M. (1999), "Optimal Monetary Policy Inertia", *mimeo*, Princeton University.

Woodford, M. (2001), "The Taylor Rule and Optimal Monetary Policy", *American Economic Review*, 91(2), pp. 232-237.

Woodford, M. (2003), "Interest and Prices : Foundations of a Theory of Monetary Policy", Chapitre III, *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey.

Yao, Y-C. (1988), "Estimating the Number of Change-Points via Schwarz' Criterion", *Statistics and Probability Letters* 6, pp. 181-189.

Yao, Y-C. & S. T. Au (1989), "Least Squares Estimation of a Step Function", *Sankhya*, 51(A), pp. 370-381.

Yin, Y.Q. (1988), "Detection of the Number, Locations and magnitudes of jumps", *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 4, pp. 445-455.

Yun, T. (1996), "Nominal Price Rigidity, Money Supply Endogeneity, and Business Cycles", *Journal of Monetary Economics*, 37, pp. 345-370.

Zivot, E. & D. W. K. Andrews, (1992), "Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Orice Shock, and the Unit Root Hypothesis". *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, pp. 251-270.

# Table des matières

Remerciements . . . . .	i
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>I Chocs Monétaires et Persistance de l’Inflation<sup>24</sup></b>	<b>22</b>
<b>1 La Persistance de l’Inflation dans les Modèles Néo-Keynésiens</b>	<b>23</b>
Introduction . . . . .	23
1 Présentation du cadre commun . . . . .	25
2 Les règles d’ajustement à prix fixes . . . . .	29
2.1 Prix fixes pour une durée aléatoire (Calvo, 1983) . . . . .	29
2.2 Prix fixes pour une durée déterminée (Taylor, 1980) . . . . .	30
2.3 Prix fixes pour une durée aléatoire et anticipations adaptatives (Galí & Gertler, 1999) . . . . .	32
2.4 Prix fixes stipulés en termes réels (Fuhrer & Moore, 1995) . . . . .	33
3 Les règles d’ajustement avec prix prédéterminés . . . . .	34
3.1 Prix prédéterminés pour deux périodes (Fischer, 1977) . . . . .	34
3.2 Prix prédéterminés pour une durée aléatoire (Mankiw et Reis, 2002) . . . . .	35

---

<sup>24</sup>Cette partie est issue des travaux de Ben Aïssa & Musy (2004a & 2004b).

4	L'impact d'une politique de désinflation . . . . .	36
	Conclusion . . . . .	40
5	Annexes . . . . .	42
5.1	Annexe I : Dérivation du prix optimal de la firme $i$ . . . . .	42
5.2	Annexe II : Dynamique des différents modèles . . . . .	45
5.3	Annexe III : Dynamique du modèle de Mankiw et Reis . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Impact de la Périodicité des Contrats sur la Persistance de l'Inflation</b>	<b>51</b>
	Introduction . . . . .	51
1	Le cadre théorique . . . . .	54
1.1	Modèles à prix rigides (prix fixes) . . . . .	55
1.2	Modèles à informations rigides (prix prédéterminés) . . . . .	56
2	Persistance et Périodicité . . . . .	56
3	L'impact du choix de la périodicité . . . . .	60
3.1	Les autocorrélations de l'inflation . . . . .	64
3.2	Le phénomène d'accélération . . . . .	66
	Conclusion . . . . .	68
4	Annexes . . . . .	70
4.1	Annexe I : Périodicité dans le modèle de Taylor . . . . .	70
4.2	Annexe II : Périodicité dans le modèle de Fuhrer et Moore . . . . .	77

## II Densité Spectrale & Identification des Changements

**Structurels dans l’Inflation Américaine<sup>25</sup> 84**

**3 La Théorie de l’Analyse Spectrale 85**

Introduction . . . . . 85

1 Processus Stationnaires . . . . . 87

1.1 Les théorèmes fondamentaux . . . . . 88

1.2 Méthodes d’estimation de la densité spectrale classique . . . . . 93

2 Processus non stationnaires . . . . . 104

2.1 Les propriétés d’un spectre évolutif . . . . . 104

2.2 Méthodes d’estimation de la densité spectrale évolutive . . . . . 129

Conclusion . . . . . 144

**4 Densité Spectrale Évolutive & Identification des Changements Structurels 146**

Introduction . . . . . 146

1 Stabilité de la densité spectrale . . . . . 148

1.1 Théorie du Spectre Évolutif de Priestley . . . . . 150

1.2 Test d’Artis, Bladen-Hovell et Nachane (1992) . . . . . 153

1.3 Test de stationnarité basé sur la densité spectrale évolutive . . . 155

1.4 Extension du test : Un Algorithme Séquentiel pour l’Identification de Points de rupture multiples . . . . . 159

1.5 Aperçu historique des faits économiques du processus inflationniste américain . . . . . 168

---

<sup>25</sup>Cette partie a bénéficié de plusieurs travaux : Ahamada & Ben Aïssa (2004a & 2004b), Ben Aïssa & Jouini (2003), Ben Aïssa, Boutahar & Jouini (2004) et Ben Aïssa & Boutahar (2004).

2	Stabilité de la variance : Un Algorithme basé sur les Sommes Cumulatives (ICSS) . . . . .	179
2.1	Les Fondements . . . . .	179
2.2	L'Algorithme . . . . .	180
2.3	Application à l'Inflation aux États-Unis . . . . .	182
3	Stabilité de la moyenne . . . . .	186
3.1	Le modèle de changement structurel . . . . .	187
3.2	Procédures d'identification . . . . .	189
	Conclusion . . . . .	196

### **III Essais Empiriques sur la Courbe Néo-Keynésienne de Phillips<sup>26</sup> 198**

<b>5</b>	<b>Régime Monétaire &amp; Stabilité des Paramètres de la Courbe de Phillips Hybride 199</b>
	Introduction . . . . . 199
1	Spécification de la courbe de Phillips néo-keynésienne hybride . . . . 203
2	Une analyse empirique de la stabilité des paramètres . . . . . 206
2.1	Spécification de la méthode d'estimation . . . . . 209
2.2	Les résultats des estimations avec un point de rupture en 1981 210
2.3	Etude de la stabilité avec découpage de deux périodes dans l'intervalle 1981-1998 . . . . . 214
3	Conclusion . . . . . 217
4	Annexes . . . . . 219

---

<sup>26</sup>La cinquième chapitre est issu du travail de Ben Aïssa & Musy (2004c). Je dois l'idée et l'intuition de cet article à Alessandra Casella que je remercie beaucoup.

4.1	Annexe I : Les fonctions de réponse de l'inflation (1961-1998, 1961-1981, 1982-1998) . . . . .	219
4.2	Annexe II : Les fonctions de réponse de l'inflation (1982-1998, 1982-1990, 1991-1998) . . . . .	220
<b>6</b>	<b>Résolution des Modèles Multivariés à Anticipations Rationnelles &amp; Estimation Structurale d'un Modèle Néo-Keynésien Général</b>	<b>222</b>
	Introduction . . . . .	222
1	Méthodes de Résolution pour les Modèles Multivariés à Anticipations Rationnelles . . . . .	225
1.1	Forme générale . . . . .	226
1.2	Une revue de quelques méthodes de résolution . . . . .	229
2	Estimation Structurale d'un Modèle Néo-Keynésien Général . . . . .	250
2.1	Spécification générale du modèle . . . . .	250
2.2	Résolution analytique du modèle . . . . .	255
2.3	Maximum de Vraisemblance en Information Complète (FIML) . . . . .	260
	Conclusion . . . . .	267
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>270</b>
	<b>Bibliographie Générale</b>	<b>278</b>